VIETOVE FORMULE. RASTAVLJANJE KVADRATNOG TRINOMA NA LINEARNE ČINIOCE

Brojevi x_1 i x_2 su rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ ako i samo ako je

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad \text{i} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Ove dve jednakosti zovu se Vietove formule.

Čemu one služe?

Osnovna primena da nam pomognu da kada imamo rešenja x_1 i x_2 napravimo kvadratnu jednačinu:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$

ili bi možda bilo preciznije

$a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]=0$ najčešće se ovde uzima $a=1$, pa je to formula

Primer 1: Napisati kvadratnu jednačinu čija su rešenja:

a) $x_1=3, x_2=-2$
b) Jedno rešenje je $x_1=1+2i$

a) $x_1=3, \quad x_2=-2$

$$x_1+x_2=3+(-2)=+1$$
$$x_1\cdot x_2=3\cdot(-2)=-6$$

Formula je $a\left[x^2-\underbrace{(x_1+x_2)}_{1}x+\underbrace{x_1\cdot x_2}_{-6}\right]=0$

Pa je $a\left[x^2-x-6\right]=0$ najčešće se uzima $\underline{a=1}$ $\Rightarrow$ $x^2-x-6=0$

b) $x_1=1+2i$, Nemamo drugo rešenje?

Pošto znamo da su rešenja kvadratne jednačine konjugovano kompleksni brojevi to mora biti: $x_2=1-2i$

$x_1 + x_2 = 1 + 2i + 1 - 2i = 2$

$x_1 \cdot x_2 = (1+2i)\cdot(1-2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 =$

(pošto je $i^2 = -1$) $= 1 + 4 = 5$

Zamenimo u formulu:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$x^2 - 2x + 5 = 0$ je tražena kvadratna jednačina

Primer 2: U jednačini $mx^2 - (3m+1)x + m = 0$ odrediti vrednost realnog parametra m tako da važi: $x_1 + x_2 = 5$

Rešenje: $a = m$, $b = -(3m+1)$, $c = m$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-(3m+1)}{m} = \frac{3m+1}{m}$$

Kako je $x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \dfrac{3m+1}{m} = 5$

$$3m + 1 = 5m$$
$$3m - 5m = -1$$
$$-2m = -1$$
$$m = \frac{1}{2}$$

Primer 3: Odrediti vrednost realnog parametra k tako da za x_1 i x_2 jednačine:

$x^2 - 4x + 3(k-1) = 0$ važi $x_1 - 3x_2 = 0$

Rešenje: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-4}{1} = 4$

$a = 1$, $b = -4$, $c = 3(k-1)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{array}\right\} \text{rešimo kao sistem}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \\ \hline 4x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 3 \end{array}$$

Kako je $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow 3 \cdot 1 = \dfrac{3(k-1)}{1} \Rightarrow k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$

Primer 4: U jednačini $x^2-(m+1)x+m=0$ odrediti realan broj m tako da njena rešenja zadovoljavaju jednakost $x_1^2+x_2^2=10$

Rešenje:

$$\begin{aligned} a&=1\\ b&=-(m+1)\\ c&=m \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}=-\frac{-(m+1)}{1}=m+1\\ x_1+x_2&=\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=m \end{aligned}$$

Ovaj izraz $x_1^2+x_2^2$ $\rightarrow$ se često javlja u zadacima. Da ga izvedemo kao formulicu pa ćemo je gotovu upotrebljavati u drugim zadacima.

Krenimo od poznate formule za kvadrat binoma: $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

Odavde je: $\boxed{x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}$ **ZAPAMTI!!!**

Vratimo se u zadatak:

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2=10\Rightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2&=10\\ (m+1)^2-2m&=10\\ m^2+2m+1-2m&=10\\ m^2&=10-1\\ m^2&=9\\ m&=\pm\sqrt{9}\\ m_1&=3\\ m_2&=-3 \end{aligned}$$

Primer 5: Odrediti koeficijente p i q kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$ tako da njena rešenja budu $\begin{aligned} x_1&=p\\ x_2&=q \end{aligned}$

Rešenja:

$$\begin{aligned} a&=1\\ b&=p\\ c&=q \end{aligned} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}=-\frac{p}{1}=-p\\ x_1\cdot x_2&=\frac{c}{a}=q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} p+q&=-p\\ p\cdot q&=q \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} 2p+q&=0\\ pq-q&=0 \end{aligned}$$

Iz druge jednačine sistema: $pq - q = 0 \Rightarrow q(p-1) = 0$ pa je q = 0 ili $p = 1$

Za $q = 0 \Rightarrow$ vratimo u prvu jednačinu:
$2p + q = 0 \Rightarrow 2p + 0 = 0 \Rightarrow p = 0$
Za $p = 1 \Rightarrow 2p + q = 0 \Rightarrow 2 + q = 0 \Rightarrow q = -2$
Dakle ta kvadratna jednačina je:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \text{za} \quad p = 0 \quad \text{i} \quad q = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{za} \quad p = 1 \quad \wedge \quad q = -2 \end{aligned}$$

Rastavljanje kvadratnog trinoma na činioce

Kvadratni trinom po x je izraz oblika: $ax^2 + bx + c$ gde su $a, b, c \rightarrow$ brojevi i $a \neq 0$.
Brojevi a, b i c su koeficijenti kvadratnog trinoma.

Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ onda je:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Primer1: Kvadratni trinom:

a) $x^2 + 5x + 6$
b) $x^2 + 2x + 2$
rastaviti na činioce.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ najpre rešimo kvadratnu jednačinu:

$$\begin{array}{lll} a = 1 & D = b^2 - 4ac & x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \\ b = -5 & D = 25 - 24 & x_1 = 3 \\ c = 6 & D = 1 & x_2 = 2 \end{array}$$

Formula: $a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x-3)(x-2) = (x-3)(x-2)$
Dakle: $x^2 + 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

b) $x^2+2x+2=0 \quad \Rightarrow \quad a=1, b=2, c=2 \qquad D=4-8=-4$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=\frac{2(-1\pm i)}{2}$$
$$x_1=-1+i$$
$$x_2=-1-i$$

$a(x-x_1)(x-x_2)=1(x+1-i)(x+1+i)$

Dakle: $x^2+2x+2=(x+1-i)(x+1+i)$

Primer 2: Skratiti razlomak: $\dfrac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}$

Rešenje: Uzećemo posebno imenilac , posebno brojilac i rastaviti ih na činioce.

$$3x^2+2x-8=0$$

$a=3 \qquad D=b^2-4ac \qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$b=2 \qquad D=4+4\cdot 3\cdot 8 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 10}{6}$

$c=-8 \qquad D=4+96$

$D=100$

$$x_1=\frac{-2+10}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$
$$x_2=\frac{-2-10}{6}=-2$$

Dakle: $3x^2+2x-8=a(x-x_1)(x-x_2)=3(x-\frac{4}{3})(x+2)$

$$12x^2-7x-12=0$$

$a=12 \qquad D=b^2-4ac \qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$b=-7 \qquad D=4-4\cdot 3\cdot(-12) \qquad x_{1,2}=\dfrac{7\pm 25}{24}$

$c=-12 \qquad D=49+576$

$D=625$

$$x_1=\frac{7+25}{24}=\frac{32}{24}=\frac{4}{3}$$
$$x_2=\frac{7-25}{24}=-\frac{18}{24}=-\frac{3}{4}$$

Dakle: $12x^2-7x-12=a(x-x_1)(x-x_2)=12(x-\frac{4}{3})(x+\frac{3}{4})$

Vratimo se sad u razlomak

$$\frac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}=\frac{\cancel{3}\,\cancel{(x-\frac{4}{3})}\,(x+2)}{\cancel{12}\,\cancel{(x-\frac{4}{3})}\,(x+\frac{3}{4})}=\frac{x+2}{4(x+\frac{3}{4})}$$

Naravno uz uslov $\begin{array}{l} x-\frac{4}{3}\neq 0 \\ x\neq \frac{4}{3}\end{array}$ i $\begin{array}{l} x+\frac{3}{4}\neq 0 \\ x\neq -\frac{3}{4}\end{array}$

<u>Primer 3:</u> Skratiti razlomak: $\dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

<u>Rešenje:</u> $x^2-2x-3=0$

$$\begin{array}{lll} a=1 & D=b^2-4ac & x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \\ b=-2 & D=4+12 & x_{1,2}=\dfrac{2\pm 4}{2} \\ c=-3 & D=16 & x_1=3 \\ & & x_2=-1 \end{array}$$

Dakle: $x^2-2x-3=a(x+x_1)(x+x_2)=(1(x-3)(x-(-1))=(x-3)(x+1)$

$x^3+1\rightarrow$ ćemo rastaviti po formuli:
$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ <u>**VIDI POLINOMI**</u>

pa je: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

Vratimo se u razlomak:

$$\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}=\frac{\cancel{(x+1)}\,(x^2-x+1)}{(x-3)\,\cancel{(x+1)}}=\frac{x^2-x+1}{x-3}$$ naravno uz uslov $\begin{array}{l} x-3\neq 0 \\ x\neq 3\end{array}$ i $\begin{array}{l} x+1\neq 0 \\ x\neq -1\end{array}$

U nekim zadacima nam traže da rešenja budu pozitivna (ili negativna). Pokažimo koji su to **uslovi**:

1) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

<u>realna</u> i <u>pozitivna</u> $\Leftrightarrow D\geq 0,\ \dfrac{b}{a}<0, \dfrac{c}{a}>0$

2) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

<u>realna</u> i <u>negativna</u> $\Leftrightarrow D \geq 0, \ \dfrac{b}{a} > 0, \dfrac{c}{a} > 0$

Ova razmišljanja (teoreme) proizilaze iz Vietovih pravila:
→ Da bi rešenja bila realna je $D \geq 0$

→ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

1) x_1 i x_2 pozitivna $\Rightarrow$
$$x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$$
$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$$

2) x_1 i x_2 negativna $\Rightarrow$
$$x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0$$
$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$$

(minus puta minus je plus)

<u>Primer:</u> Odrediti parameter m tako da rešenja jednačine $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ budu pozitivna.

<u>Rešenja:</u> Iz $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ vidimo da je

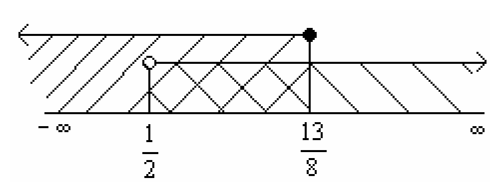
$$a = 1$$
$$b = -3$$
$$c = 2m - 1$$

$$D \geq 0, \quad \frac{b}{a} < 0, \quad \frac{c}{a} > 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1)$$
$$D = 9 - 8m + 4$$
$$D = 13 - 8m$$

$D \geq 0 \Rightarrow$ $13 - 8m \geq 0$ **<u>(Pazi: znak se okreće)</u>**
$$-8m \geq -13$$
$$m \leq \frac{13}{8}$$

$$\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-3}{1} < 0 \Rightarrow \text{ Zadovoljeno!!!}$$



$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2m - 1}{1} < 0$$
$$2m - 1 < 0$$
$$2m < 1$$
$$m < \frac{1}{2}$$

$$m \in \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{8}\right]$$