VEROVATNOĆA - ZADACI (II DEO)

Klasična definicija verovatnoće

Verovatnoća događaja A jednaka je količniku broja povoljnih slučajeva za događaj A i broja svih mogućih slučajeva.

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$$

n je broj svih mogućih slučajeva

m je broj povoljnih slučajeva

$\boxed{PRIMER\ 1.}$

Odrediti verovatnoću da bačena kocka za igru na gornjoj strani pokaže paran broj.

Rešenje:

A: "pao je paran broj"

Da još jednom ponovimo savet iz prvog dela: uvek kad možete, skicirajte problem i napišite sve mogućnosti!

1	2	3	4	5	6

Jasno je da je broj svih mogućnosti $n=6$

1	2	3	4	5	6

Povoljno je da padne: 2,4 ili 6 (paran broj), pa je onda $m=3$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{PRIMER\ 2.}$

Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockicama pojaviti zbir 9 na gornjoj strani?

Rešenje:

A: "pao je zbir 9"

Već smo videli u prethodnom fajlu da se broj svih mogućnosti izračunava:

$$n = \overline{V}_2^6 = 6^2 = 36$$

Da vidimo šta je nama povoljno:

1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	**6**	**3**
1	4	2	4	3	4	4	4	**5**	**4**	6	4
1	5	2	5	3	5	**4**	**5**	5	5	6	5
1	6	2	6	**3**	**6**	4	6	5	6	6	6

Imamo četiri povoljne mogućnosti , pa je $m = 4$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$\boxed{PRIMER\ 3.}$

Kolika je verovatnoća da pri bacanju dva novčića padne bar jedan grb?

<u>Rešenje:</u>

Kad u zadatku kaže "bar jedan", to znači da nam je povoljno da padne jedan ali i oba grba!

A: "pao je bar jedan grb"

P	P		P	P
P	G		P	**G**
G	P		**G**	P
G	G		**G**	**G**
n=4			m=3	

Verovatnoća je $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

Ovaj zadatak smo mogli da rešimo i na drugi način, koji se često koristi kad u formulaciji zadatka imamo reči "bar jedan".

Posmatramo suprotan događaj događaju A: "pao je bar jedan grb".

To će biti $\overline{A}$, koje znači da nije pao nijedan grb (odnosno, pala su dva pisma)

n=4 m=1

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$$

Dalje koristimo:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
$$P(A) = 1 - \frac{1}{4}$$
$$P(A) = \frac{3}{4}$$

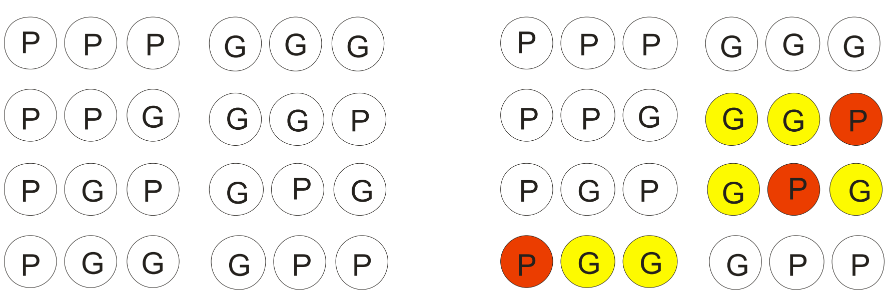
$\boxed{PRIMER\ 4.}$

Odrediti verovatnoću da pri istovremenom bacanju tri novčića padne tačno jedno pismo.

Rešenje:

A: "palo je tačno jedno pismo"

Ovde nam traže konkretno da bude samo jedno pismo na tri novčića, pa nam nije povoljno da budu dva pisma ili sva tri...



n=8 m=3

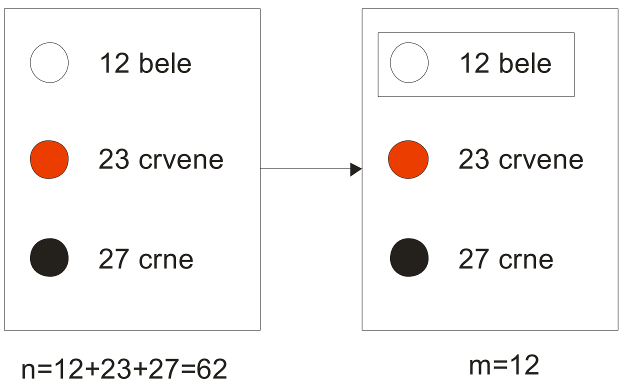
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$$

$\boxed{PRIMER\ 5.}$

U posudi se nalazi 12 belih, 23 crvene i 27 crnih kuglica. Odrediti verovatnoću da izvučemo belu kuglicu, pod uslovom da su sve mogućnosti podjednako verovatne.

<u>Rešenje:</u>

A: "izvučena je bela kuglica"



Broj svih mogućnosti dobijamo kad saberemo sve kuglice, dakle $n = 62$.

Nama je povoljno da izvučemo belu kuglicu, a pošto ih ima 12, to je $m = 12$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{62} = \frac{6}{31}$$

$\boxed{PRIMER\ 6.}$

Nepismeno dete sastavlja reči od sledećih slova: a,a,a,e,i,k,m,m,t,t. Odrediti verovatnoću da će sastaviti reč "matematika".

<u>Rešenje:</u>

Ovaj zadatak ćemo rešiti na dva načina.

I način

Koristimo klasičnu definiciju verovatnoće:

A: "sastavljena je reč matematika"

Broj svih mogućnosti je ustvari broj svih permutacija od ovih 10 slova, ali sa ponavljanjem , jer se slovo <u>a</u> ponavlja 3 puta, slovo <u>m</u> - 2 puta i slovo <u>t</u> - 2 puta.

$$n=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=151200$$

Od svih mogućnosti, nama je povoljna samo jedna, da reč bude matematika, pa je $m=1$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{151200}$$

II način

Ovaj način je više logički, ići ćemo slovo po slovo:

Najpre od ovih deset slova biramo slovo m, verovatnoća tog događaja je $\frac{2}{10}$, jer imamo 10 slova a 2 su m.

a a a e l k ~~m~~ m t t

Dalje nam treba slovo a. Verovatnoća da ćemo uzeti a od preostalih 9 slova je $\frac{3}{9}$, jer imamo 3 slova a.

~~a~~ a a e l k ~~m~~ m t t

Znači, za sad imamo $\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}$. Idemo dalje, biramo slovo t od preostalih 8 slova. Tu je verovatnoća $\frac{2}{8}$.

~~a~~ a a e l k ~~m~~ m ~~t~~ t

Imamo dakle za sada $\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}$.

Napravili smo mat , sledeće slovo koje nam treba je e, a njega uzimamo sa verovatnoćom $\frac{1}{7}$, jer su ostala 7 slova a imamo samo jedno e.

~~a~~ a a ~~e~~ l k ~~m~~ m ~~t~~ t

Sledeći ovaj postupak (nadam se da smo ukapirali) , dobijamo:

$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \quad \text{odnosno} \quad P(A)=\frac{1}{151200}$$

$\boxed{PRIMER\ 7.}$

U kutiji se nalaze 3 žute, 4 crvene i 5 plave kuglice. Izvlačimo 3 kuglice ali na različite načine:

i) sve tri odjednom
ii) jednu po jednu sa vraćanjem
iii) jednu po jednu bez vraćanja

Odrediti verovatnoću da su izvučene:

a) sve tri crvene kuglice
b) 2 plave i jedna žuta
c) sve tri kuglice različite boje.

Rešenje:

Pazite, zavisno od načina na koji izvlačimo kuglice, koristimo različite formule iz kombinatorike!

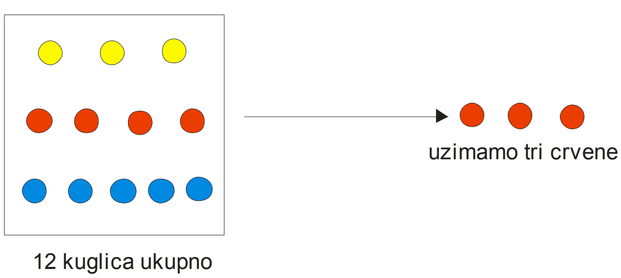
Ako uzimamo sve kuglice odjednom, koristimo kombinacije C_k^n.

Ako uzimamo kuglice jednu po jednu sa vraćanjem , koristimo $\overline{V}_k^n$.

Ako uzimamo kuglice jednu po jednu bez vraćanja , koristimo V_k^n

a) sve tri crvene kuglice

A: "izvučene su tri crvene kuglice"



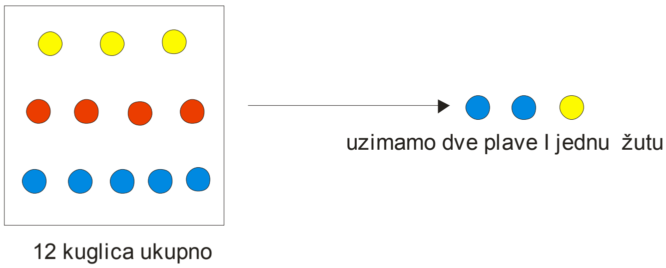
i) $P(A)=\frac{C_3^4}{C_3^{12}}=\frac{4}{220}=\frac{1}{55}$ sve tri odjednom

ii) $P(A)=\frac{\overline{V}_3^4}{\overline{V}_3^{12}}=\frac{4^3}{12^3}=\left(\frac{4}{12}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ jedna po jedna sa vraćanjem

iii) $P(A)=\frac{V_3^4}{V_3^{12}}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{12\cdot 11\cdot 10}=\frac{1}{55}$ jedna po jedna bez vraćanja

b) 2 plave i jedna žuta

B: “izvučene su 2 plave i jedna žuta kuglica”

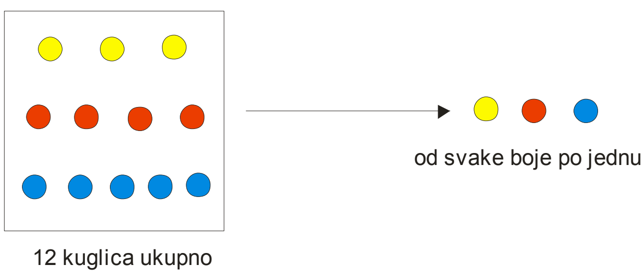


i) $P(B)=\dfrac{C_2^5\cdot C_1^3}{C_3^{12}}=\dfrac{10\cdot 3}{220}=\dfrac{3}{22}$ sve tri odjednom

ii) $P(B)=\dfrac{\overline{V}_2^5\cdot \overline{V}_1^3}{\overline{V}_3^{12}}=\dfrac{5^2\cdot 3^1}{12^3}=\dfrac{25\cdot 3}{12\cdot 12\cdot 12}=\dfrac{25}{576}$ jedna po jedna sa vraćanjem

iii) $P(B)=\dfrac{V_2^5\cdot V_1^3}{V_3^{12}}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{12\cdot 11\cdot 10}=\dfrac{1}{22}$ jedna po jedna bez vraćanja

c) sve tri kuglice različite boje.



C: “izvučene su sve tri kuglice različite boje”

i) $P(C)=\dfrac{C_1^3\cdot C_1^4\cdot C_1^5}{C_3^{12}}=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{220}=\dfrac{3}{11}$ sve tri odjednom

ii) $P(C)=\dfrac{\overline{V}_1^3\cdot \overline{V}_1^4\cdot \overline{V}_1^5}{\overline{V}_3^{12}}=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{12^3}=\dfrac{5}{144}$ jedna po jedna sa vraćanjem

iii) $P(C)=\dfrac{V_1^3\cdot V_1^4\cdot V_1^5}{V_3^{12}}=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{12\cdot 11\cdot 10}=\dfrac{1}{22}$ jedna po jedna bez vraćanja

$\boxed{\textit{PRIMER } 8.}$

Kocka, čije su sve površi obojene, izdeljena je na hiljadu kocaka jednakih dimenzija. Tako dobijene kocke su izmešane. Odrediti verovatnoću da će nasumice izabrana kocka imati dve obojene površi.

<u>Rešenje:</u>

Događaj A: «izvučena je kockica sa dve obojene površine»

Pošto imamo hiljadu kockica, očigledno je $n = 1000$

Kako **kocka ima 12 ivica** a svaka ivica sadrži po 10 kockica i znamo da ivice na uglovima imaju sve tri obojene strane, ispada da za svaku ivicu imamo po 10 - 2 = **8 kockica sa po dve obojene strane.**

Onda je broj kockica sa dve obojene strane $m = 12 \cdot 8 = 96$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{96}{1000} = 0,096$$

$\boxed{\textit{PRIMER } 9.}$

Iz špila od 32 karte nasumice su izvučene tri karte odjednom.

a) Naći verovatnoću da je među njima tačno jedan AS
b) Naći verovatnoću da će među biti bar jedan AS

<u>Rešenje:</u>

a) Naći verovatnoću da je među njima tačno jedan AS

Događaj A: « izvučen je tačno jedan AS »

Broj svih mogućnosti je da od 32 karte uzmemo 3: $\boxed{C_3^{32}}$

Broj povoljnih mogućnosti je da bude 1 AS: $\boxed{C_1^4}$ jer imamo 4 ASA, a preostale dve karte mogu biti bilo koje: $\boxed{C_2^{28}}$

$$P(A) = \frac{C_1^4 \cdot C_2^{28}}{C_3^{32}} = \frac{4 \cdot \frac{\cancel{28} \cdot 27}{\cancel{2} \cdot 1}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot \cancel{30}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1}} = \frac{4 \cdot 14 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 5} \approx 0,30$$

b) Naći verovatnoću da će među biti bar jedan AS

Događaj B: « izvučen je bar jedan AS »

U ovakvim situacijama smo rekli da je pametno naći verovatnoću suprotnog događaja , pa to oduzeti od jedinice.

Suprotan događaj događaju B bi bio da nije izvučen nijedan AS.

$$P(\overline{B}) = \frac{C_3^{28}}{C_3^{32}} = \frac{\dfrac{28 \cdot 27 \cdot 26}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}}{\dfrac{32 \cdot 31 \cdot 30}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{32 \cdot 31 \cdot 30} \approx 0,66$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 1 - 0,66 \approx 0,34$$

www.matematiranje.com