

VEROVATNOĆA - ZADACI (IDEO)

U računu verovatnoće osnovni pojmovi su **opit** i **dogadjaj**.

Svaki opit se završava nekim ishodom koji se naziva **elementarni dogadjaj**.

Elementarne događaje profesori različito obeležavaju, mi ćemo ih obeležiti sa e_1, e_2, e_3, \dots a vi naravno radite kako kaže vaš profesor.

Skup svih mogućih ishoda datog opita, odnosno skup svih elementarnih događaja se najčešće obeležava sa E .

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

primer 1.

Odrediti skup svih elementarnih događaja za sledeće opite:

- a) bacanje jednog dinara
- b) bacanje dva dinara
- c) bacanje tri dinara
- d) bacanje jedne kocke
- e) bacanje dve kocke
- f) bacanje tri kocke

Rešenja:

- a) bacanje jednog dinara

Naravno, prilikom bacanja dinara može pasti **pismo** ili može pasti **grb**.



Ako sa e_1 obeležimo pojavu pisma na gornjoj strani novčića a sa e_2 obeležimo pojavu grba onda je

skup svih elementarnih događaja ovog opita $E = \{e_1, e_2\}$, a mislimo da je bolje ovo obeležiti sa $E = \{P, G\}$.

- b) bacanje dva dinara

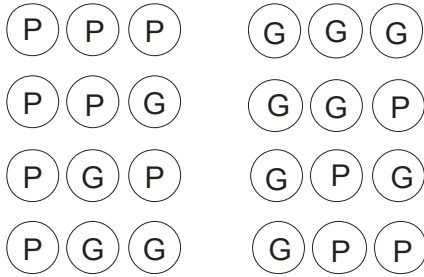
Na gornjoj strani novčića se može pojaviti:



Pa je $E = \{PP, PG, GP, GG\}$, odnosno ima 4 ishoda ovog opita.

c) bacanje tri dinara

Ako bacamo tri novčića, broj ishoda je 8. Da vidimo:



$$E = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GGG, GGP, GPG, GPP\}$$

d) bacanje jedne kocke

Većina nas je igrala "ne ljuti se čoveče" ili neku sličnu igricu sa jednom kockicom...

Na gornjoj strani kocke može pasti jedan od brojeva :



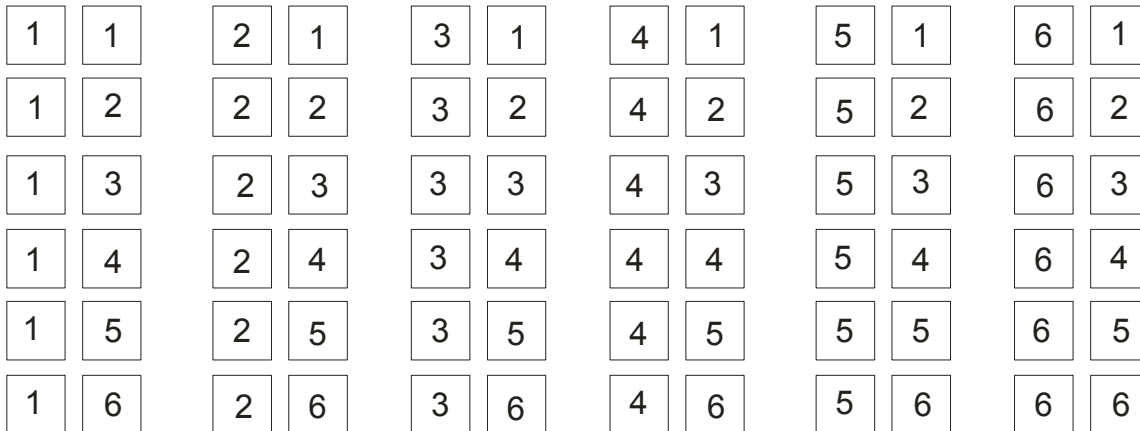
pa je skup svih elementarnih događaja : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Jasno je da ih ima 6. Preko formula iz kombinatorike bi ovo izračunali kao varijacije sa ponavljanjem: $\overline{V}_1^6 = 6^1 = 6$

e) bacanje dve kocke

Pri bacanju dve kockice, broj mogućih ishoda je veći: $\overline{V}_2^6 = 6^2 = 36$

Naš savet je da uvek kad je to moguće, odnosno kad ne zahteva previše pisanja, ispišete sve mogućnosti opita:



$$E = \{11, 12, 13, \dots, 66\}$$

f) bacanje tri kocke

Broj svih elementarnih događaja je $\overline{V}_3^6 = 6^3 = 216$. E ovde bi već bilo preterano da pišemo redom sve moguće ishode.

$$E = \{111, 112, 113, \dots, 666\}$$

Bitno je da znamo koliko ih ukupno ima.

E sad, u zadacima mi moramo obavezno odrediti skup svih elementarnih događaja, a oni od nas traže da nađemo verovatnoću pojave jednog od njih (ili više njih...).

Jedan takav događaj se najčešće obeležava slovima latinice: A, B, C...

Slučajan događaj A je podskup skupa E elementarnih događaja.

Mi moramo precizno, navodnicima da opišemo taj događaj A = ".....".

Ako smo sigurni da neki opit izaziva pojavu događaja A, onda za događaj A kažemo da je **pouzdan**.

Ako se događaj A sigurno ne realizuje datim opitom, onda se on naziva **nemoguć**. (obeležava se sa \emptyset)

Na primer, kad bacamo jednu kockicu, sigurni smo da će se na gornjoj strani pojaviti jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 a ako obeležimo u tom opitu da je događaj A: "pojavio se broj 7 na gornjoj strani kockice", sigurni smo da je to nemoguć događaj.

Ako posmatramo dva događaja koji se mogu dogoditi u istom opitu, onda oni mogu biti **zavisni i nezavisni**.

Na primer, neka je opit bacanje dve kockice. Posmatramo tri događaja:

Događaj A: "pao je zbir 8"

Događaj B: "pao je zbir 7"

Događaj C: "pala je bar jedna šestica"

Ispitati da li su ovi događaji međusobno zavisni ili ne.

Ovde je najbolje ispisati sve mogućnosti...

1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

A: "pao je zbir 8"

B: "pao je zbir 7"

C: "pala je bar jedna šestica"

Vidimo da su događaji A i B nezavisni.

Međutim, ako posmatramo događaje A i C, vidimo da su oni zavisni, jer se oba dešavaju kad padne (2,6) i (6,2).

Takođe su i B i C zavisni, jer kod oba događaja imamo (1,6) i (6,1).

Zbir (unija) dva događaja A i B naziva se događaj **A+B** (ili $A \cup B$) koji se sastoji u tome da se realizuje bilo koji od njih, to jest bilo A, bilo B, bilo A i B.

Proizvod (presek) dva događaja A i B se obeležava sa **AB** (ili $A \cap B$) i predstavlja događaj koji se sastoji u tome da se događaji A i B pojavljuju zajedno.

Ako se u vršenju jednog opita **realizacijom događaja A uvek realizuje i događaj B**, tada kažemo da događaj A povlači događaj B i tada je $A \subset B$.

Suprotan događaj događaja A se obeležava sa \bar{A} .

Događaji A_1, A_2, \dots, A_n obrazuju **potpun sistem događaja** ako je $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$, to jest dva po dva su isključivi događaji.

Verovatnoća slučajnog događaja A se obeležava sa **P(A)**.

Pravila:

- $0 \leq P(A) \leq 1$

Znači, verovatnoća se "meri" od 0 do 1. Nula je verovatnoća nemogućeg događaja a jedinica je verovatnoća sigurnog događaja.

2. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Kad saberemo verovatnoću nekog događaja i verovatnoću njemu suprotnog događaja, dobijamo siguran događaj, odnosno , nešto il će se desi il neće...

Često je u zadacima lakše izračunati verovatnoću suprotnog događaja, pa je onda $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

3. Ako je $A \subset B$ onda je $P(A) \leq P(B)$

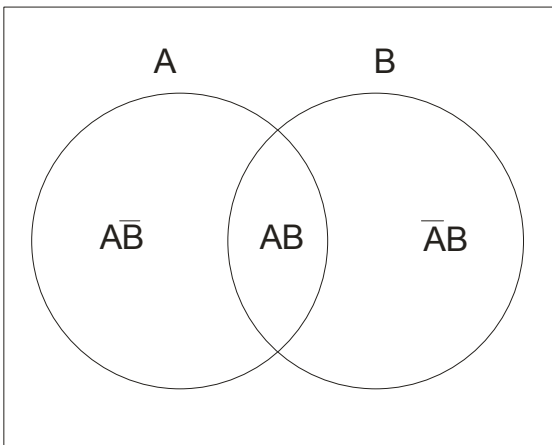
primer 2.

Data su dva događaja A i B. Pomoću simboličkih operacija sa datim događajima odrediti sledeće događaje:

- i) realizovan je događaj A a nije realizovan događaj B
- ii) realizovan je događaj B a nije realizovan događaj A
- iii) realizovana su oba događaja

Rešenja:

Pogledajmo najpre sledeću sliku:



- i) realizovan je događaj A a nije realizovan događaj B

To ćemo obeležiti sa $A\bar{B}$, to jest , realizovan je A a nije B.

- ii) realizovan je događaj B a nije realizovan događaj A

Ovo možemo obeležiti sa $\bar{A}B$

- iii) realizovana su oba događaja

Ovde je rešenje presek, odnosno to je događaj AB

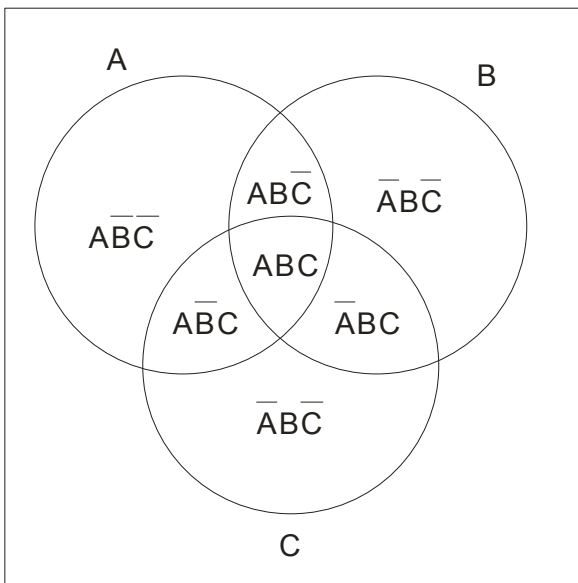
primer 3.

Data su tri događaja A, B i C. Pomoću simboličkih operacija sa datim događajima odrediti sledeće događaje:

- a) realizovan je događaj A , a nisu realizovani događaji B i C
- b) realizovani su događaji A i C, a događaj B nije
- c) realizovana su sva tri događaja
- d) realizovan je jedan i samo jedan od ova tri događaja

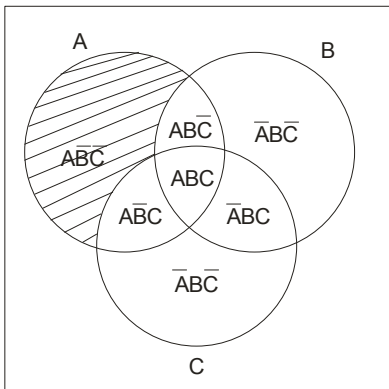
Rešenja:

Pogledajmo opet sliku gde su događaji predstavljeni pomoću skupova:



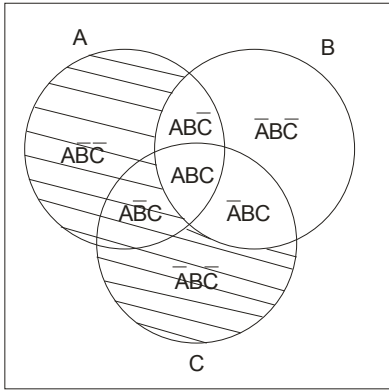
Da odgovorimo sada na postavljena pitanja:

- a) realizovan je događaj A , a nisu realizovani događaji B i C



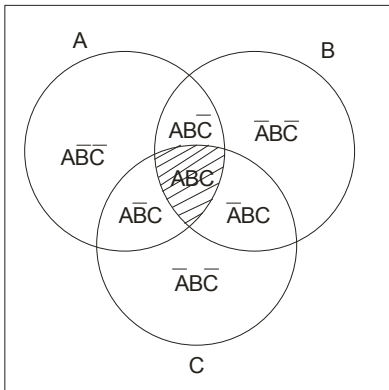
Rešenje je: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

b) realizovani su događaji A i C, a događaj B nije



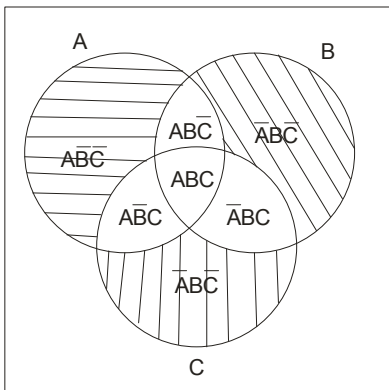
Rešenje je: $\overline{A}BC$ ili možemo zapisati $\overline{A}BC + \overline{A}BC + \overline{A}BC$ (vidi sliku)

c) realizovana su sva tri događaja



Rešenje je: ABC

d) realizovan je jedan i samo jedan od ova tri događaja



Rešenje je: $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$

Pomenimo još neka pravila:

Ako je A proizvoljan događaj , tada je :

i) $A\emptyset = \emptyset$

v) $A + \emptyset = A$

ii) $AA = A$

vi) $A + A = A$

iii) $AE = A$

vii) $A + \bar{A} = E$

iv) $A\bar{A} = \emptyset$

viii) $A + E = E$

Ako su A, B i C proizvoljni događaji, tada je:

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

c) $A(BC) = (AB)C = ABC$

d) $A(B + C) = AB + AC$