SISTEMI KVADRATNIH JEDNAČINA SA DVE NEPOZNATE

Razlikovaćemo nekoliko tipa sistema:

1) Sistem od jedne kvadratne i jedne linearne jednačine sa dve nepoznate

Postupak: Iz linearne jednačine izrazimo x ili y (šta nam je lakše). To zamenimo u kvadratnu jednačinu i nju posle sredjivanja rešimo. Ako ima rešenja, njih vraćamo u "ono" što smo izrazili.

Primer 1) Reši sistem:

$$2x^2+2y^2+3x-2=0$$
$$x-2y=-2$$

$2x^2+2y^2+3x-2=0$

$x-2y=-2 \rightarrow$ odavde izrazimo x (lakše) x zamenimo u gornju jednačinu

$$x=2y-2$$
$$2(2y-2)^2+2y^2+6y-6-2=0$$
$$2(4y^2-8y+4)+2y^2+6y-6-2=0$$
$$8y^2-16y+8+2y^2+6y-8=0$$
$$10y^2-10y=0/:10$$
$$y^2-y=0$$
$$y(y-1)=0$$
$$y_1=0 \quad \vee \quad y-1=0$$
$$y_2=1 \quad \Rightarrow \quad x_1=2\cdot 0-2=-2$$
$$x_2=2\cdot 1-2=0$$

Rešenj su: $(x_1,y_1)=(-2,0)$ i $(x_2,y_2)=(0,1)$

Primer 2) Rešiti sistem:

$$3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$$
$$2x-y+5=0$$

$$3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$$
$$2x-y+5=0$$

$$y=2x+5$$
$$3x^2+2x(2x+5)+2(2x+5)^2+3x-4(2x+5)=0$$
$$3x^2+4x^2+10x+2(4x^2+20x+25)+3x-8x-20=0$$
$$7x^2+10x+8x^2+40x+50+3x-8x-20=0$$
$$15x^2+45x+30=0/:15$$
$$x^2+3x+2=0$$

$a=1$

$b=3$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-3\pm1}{2}$

$c=2$

$x_1=-1$

$x_2=-2$

Zamenom x_1 i x_2 u $y=2x+5$ dobijamo:

$$y_1=2(-1)+5=-2+5=3$$
$$y_2=2(-2)+5=-4+5=1$$

Dakle rešenja su: $(-1{,}3)$, $\quad(-2{,}1)$

2)Sistem od dve kvadratne jednačine, koje sadrže samo ax^2 i ay^2 i slobodne članove

Ovaj sistem je oblika: $a_1x^2+b_1y^2=c_1$

$a_2x^2+b_2y^2=c_2$

Najlakše ga rešiti metodom suprotnih koeficijenata.

Primer 1) Rešiti sistem: $5x^2-6y^2=11$

$7x^2+3y^2=714$

$$5x^2-6y^2=11$$
$7x^2+3y^2=714\rightarrow$ Drugu jednačinu množimo sa 2

$$\left.\begin{aligned}5x^2-6y^2&=111\\14x^2+6y^2&=1428\end{aligned}\right\}+$$

$$19x^2=1539$$

$x^2 = 81$ $\qquad x = \pm 9$

$x = \pm\sqrt{81}$ $\qquad x_1 = 9$

$x_2 = -9$

$$7x^2 + 3y^2 = 714$$
$$7 \cdot 81 + 3y^2 = 714$$
$$567 + 3y^2 = 714$$
$$3y^2 = 714 - 567$$
$$3y^2 = 147$$
$$y^2 = 49$$
$$y = \pm\sqrt{49}$$
$$y_1 = +7$$
$$y_2 = -7$$

Pazi sad pravimo ''kombinacije'':

(9,7), (9,-7), (-9,7), (-9,-7)

Dakle, ima 4 rešenja!!!

Pre nego se upoznamo sa novim tipom sistema, naučimo šta su to HOMOGENE jednačine

Njen opšti oblik je:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

Nju možemo rešiti najlakše smenom $x = yz$ tj. $z = \frac{x}{y}$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$
$$y^2\left(A\frac{x^2}{y^2} + B\frac{xy}{y^2} + C\frac{y^2}{y^2}\right) = 0$$
$$y^2\left(A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C\right) = 0$$
$$y^2\left(Az^2 + Bz + C\right) = 0$$
$$y = 0 \quad \vee \quad \boxed{Az^2 + Bz + C = 0} \text{ nama ovo treba!!!}$$

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$z_1 = \dots$$

$$z_2 = \dots$$

Vratimo se na stare nepoznate….

$$x = z_1 y \quad \text{i} \quad x = z_2 y$$

3) Sistem od dve kvadratne jednačine od kojih je jedna homogena

Taj system je oblika: $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ry + f = 0 \end{cases}$

Iz prve jednačine (homogene) dodjemo do dve linearne jednačine, pa svaku od njih ukombinujemo sa drugom jednačinom sistema tako da dobijemo dva nova sistema jednačina.

Primer 1: Rešiti sistem jednačina:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \rightarrow \text{homogena, prvo nju rešimo}$$

$$x^2 - 3x - y + 3 = 0$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$y^2 \underbrace{\left(\frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y} + 2 \right)}_{\text{samo ovo nas zanima}} = 0 \qquad \frac{x}{y} = z \text{ smena} \quad x = zy$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = 1$$

Vratimo se u smenu:

Za $z_1 = 2 \Rightarrow x = 2y$

Za $z_2 = 1 \Rightarrow x = y$

Sad ovo zamenimo u drugu jednačinu $\underline{x^2-3x-y+3=0}$

$$\begin{aligned}&x^2-3x-y+3=0\\&(2y)^2-3\cdot 2y-y+3=0\\&4y^2-6y-y+3=0\\&4y^2-7y+3=0\\&y_{1,2}=\frac{7\pm 1}{8}\\&y_1=1\\&y_2=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x^2-3x-y+3=0\\&x^2-3x-x+3=0\\&4y^2-4x+3=0\\&x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}\\&x_1=3\\&x_2=1\\&y_1=3,\;\; y_2=1\end{aligned}$$

$$x_1=2\cdot 1=2,\quad x_2=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

Dakle , rešenja su: (2,1), $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$,(3,3), (1,1)

<u>Primer 2:</u> Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}&x^2+xy-6y^2=0\\&\underline{x^2-2xy+2y^2=18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x^2+xy-6y^2=0\\&y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}-6\right)=0\\&z^2+z-6=0 \text{ Smena } \frac{x}{y}=z\\&z_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2}\\&z_1=2\\&z_2=-3\end{aligned}$$

Dalje je : $x=yz\Rightarrow\quad x=2y\;$ ili $\;x=-3y$
Sad pravimo nova dva sistema.

$$\begin{aligned}&x=2y\\&\underline{x^2-2xy+2y^2=18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x=-3y\\&\underline{x^2-2xy+2y^2=18}\end{aligned}$$

$$(2y)^2 - 2\cdot 2y\cdot y + 2y^2 = 18$$
$$4y^2 - 4y^2 + 2y^2 = 18$$
$$y^2 = 9$$
$$y = \pm 3$$

$y_1 = +3$ $\quad$ $y_2 = -3$

$x_1 = 2\cdot 3$ $\quad$ $x_2 = 2\cdot(-3) = -6$

(6,3) $\quad$ (-6,-3)

$$(-3y)^2 - 2\cdot(-3y)\cdot y + 2y^2 = 18$$
$$9y^2 + 6y^2 + 2y^2 = 18$$
$$17y^2 = 18$$

$$y^2 = \frac{18}{17}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{18}{17}}$$
$$y_1 = +\sqrt{\frac{18}{17}}$$
$$y_2 = -\sqrt{\frac{18}{17}}$$

$$x_1 = -3\sqrt{\frac{18}{17}} \qquad x_2 = 3\sqrt{\frac{18}{17}}$$

$$\left(-3\sqrt{\frac{18}{17}}, \sqrt{\frac{18}{17}}\right) \text{ i } \left(3\sqrt{\frac{18}{17}}, -\sqrt{\frac{18}{17}}\right)$$

Dakle opet ima četri rešenja!!!

4) Sistemi koji se svode na homogene jednačine

Opšti oblik ovog sistema je:

$$a_1x^2 + b_2xy + c_1y^2 = d_1$$
$$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2$$

Ideja je da se metodom suprotnih koeficijenata unište d_1 i d_2 I da se dobije homogena jednačina. Nju rešimo i formiramo dva nova sistema. Ništa bez primera:

Primer 1: Reši sistem:

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4$$
$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

Prvu jednačinu pomnožimo sa 7, a drugu sa -4

$$\left.\begin{aligned}14x^2-21xy+14y^2&=28\\-4x^2-4xy-4y^2&=-28\end{aligned}\right\}+$$

$$10x^2-25xy+10y^2=0/:5$$

$2x^2-5xy+2y^2=0\rightarrow$ Dobili smo homogenu jednačinu!!!

$$2\frac{x^2}{y^2}-5\frac{x}{y}+2=0 \qquad \frac{x}{y}=z$$

$$2z^2-5z+2=0$$

$$z_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}$$

Vratimo se u smenu

$$z_1=2$$

$$z_2=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y}=2 \quad \text{ili} \quad \frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

$$x=2y \quad \text{ili} \quad y=2x$$

Sada izaberimo jednu od početne dve jednačine (onu sa manje brojke) i formiramo dva nova sistema:

$$x=2y$$
$$x^2+xy+y^2=7$$

$$(2y)^2+2y\cdot y+y^2=7$$
$$4y^2+2y^2+y^2=7$$
$$7y^2=7$$
$$y^2=1$$
$$y=\pm1$$
$$y_1=1$$
$$y_2=-1$$

Onda je:

$$x_1=2\cdot y_1=2$$
$$x_2=2\cdot(-1)=-2$$

$$y=2x$$
$$x^2+xy+y^2=7$$

$$x^2+x\cdot 2x+(2x)^2=7$$
$$x^2+2x^2+4x^2=7$$
$$7x^2=7$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm1$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-1$$

Onda je:

$$x_1=2x_1=2$$
$$x_2=2\cdot(-1)=-2$$

Odavde su dakle rešenja: (2,1) i (-2,-1)

Odavde su rešenja (1,2), (-1,-2)

Konačno rešenja su:

(2,1), (-2,-1), (1,2), (-1,-2)

5) Rešavanje složenijih slučajeva:

Kod sistema koji ne pripadaju nijednim od proučenih tipova, tražimo način da eliminišemo jednu nepoznatu, sredjujemo jednačine da uvedemo smenu, pravimo da jedna jednačina bude proizvod jednak nuli…

Ovde nemamo neki ‘’dobar’’ savet, iskustvo je odlučujuće, dakle što više zadataka uradite, to ćete više ‘’trika’’ naučiti!!!
Bilo kako bilo, evo par primera:

1) Rešiti sistem jednačina:

$$x + xy + y = 19$$
$$x^2 y + xy^2 = 84 \rightarrow \text{ izvičimo odavde xy}$$

$$x + y + xy = 19$$
$$xy(x + y) = 84$$

Sad uvodimo smene $x+y= a$ *i* $xy=b$

$$a + b = 19$$
$$a \cdot b = 84$$

$$b = 19 - a$$
$$a \cdot (19 - a) = 84$$
$$19a - a^2 - 84 = 0$$
$$a^2 - 19a + 84 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{19 \pm 5}{2}$$
$$a_1 = 12 \Rightarrow b_1 = 7$$
$$a_2 = 7 \Rightarrow b_2 = 12$$

Vratimo se u smene:

$$x+y=12 \quad \wedge \quad xy=7$$
$$y=12-x$$
$$x(12-x)=7$$
$$12x-x^2-7=0$$
$$x^2-12x+7=0$$

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{116}}{2}=\frac{12\pm2\sqrt{29}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{2\left(6\pm2\sqrt{29}\right)}{2}$$
$$x_1=6+2\sqrt{29}$$
$$x_2=6-2\sqrt{29}$$

$$y_1=12-6-\sqrt{29}=6-\sqrt{29}$$
$$y_2=12-6+\sqrt{29}=6+\sqrt{29}$$

$$\left(6+\sqrt{29},6-\sqrt{29}\right),\left(6-\sqrt{29},6+\sqrt{29}\right)$$

$$x+y=7 \quad \wedge \quad xy=12$$
$$y=7-x$$
$$x(7-x)=12$$
$$7x-x^2-12=0$$
$$x^2-7x+12=0$$
$$x_{1,2}=\frac{7\pm1}{2}$$

$$x_1=4$$
$$x_2=3$$
$$y_1=3 \qquad y_2=4$$

Odavde su rešenja:
(4,3), (3,4)

2) Rešiti sistem:

$$x^4+y^2=17$$
$$x^2+y^2=5$$

Odavde možemo da drugu jednačinu pomnožimo sa (-1) I da eliminišemo y^2

$$x^4+y^2=17$$
$$-x^2-y^2=-5$$

$$x^4-x^2=12$$
$$x^4-x^2-12=0 \Rightarrow \text{ ovo je bikvadratna jednačina}$$

Smena: $x^2=t$

$$t^2-t-12=0$$
$$t_{1,2}=\frac{1\pm7}{2}$$
$$t_1=4$$
$$t_2=-3$$

Vratimo se u smenu:

$$x^2 = t \qquad x^2 = -3$$
$$x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$$
$$x_1 = 2 \qquad x_3 = +\sqrt{3}i, \quad x_4 = -\sqrt{3}i$$
$$x_2 = -2$$

Vratimo se u
$$x^2 + y^2 = 5$$
$$4 + y^2 = 5$$
$$y^2 = 1$$
$$y_1 = 1$$
$$y_2 = -1$$

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$-3 + y^2 = 5$$
$$y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$$
$$y_1 = 2\sqrt{2}$$
$$y_2 = -2\sqrt{2}$$

Rešenja su:

(2,1), (2,-1), (-2,1), (-2,1), $\left(\sqrt{3}i, 2\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{3}i, -2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{3}i, 2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{3}i, -2\sqrt{2}\right)$,

Dakle ima ih 8.