

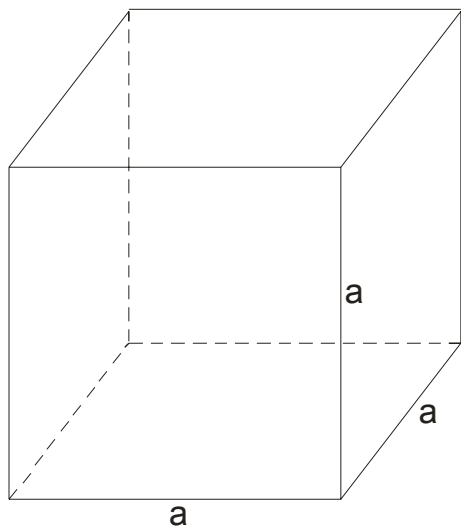
## PRIZME

Najpre da kažemo nešto o obeležavanjima i o tekstu zadatka:

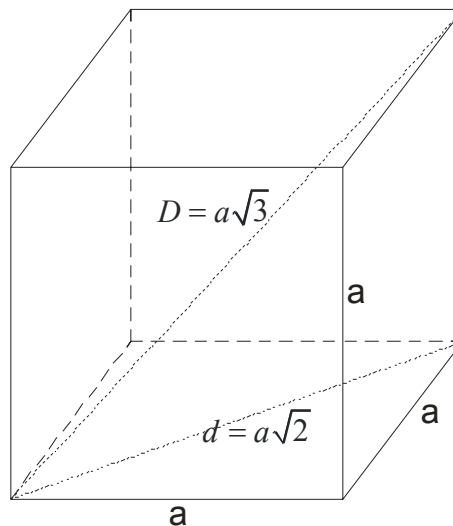
- sa **a** obeležavamo dužinu osnovne ivice
- sa **H** obeležavamo dužinu visine prizme
- sa **B** obeležavamo površinu osnove (baze)
- sa **M** obeležavamo površinu omotača
- omotač se sastoji od **bočnih strana** , naravno trostrana prizma u omotaču ima 3 takve strane, četverostrana 4 itd.
- sa **D** obeležavamo dužinu dijagonale prizme
- ako u tekstu zadatka kaže **jednakoivična** prizma, to nam govori da su osnovna ivica i visina jednake , to jest :  
**a = H**
- ako u tekstu zadatka ima reč **prava** – to znači da je visina prizme normalna na ravan osnove ili ti ,  
jednostavnije rečeno , prizma nije kriva
- ako u tekstu zadatka ima reč **pravilna** , to nam govori da je u osnovi ( bazi ) pravilan mnogougao:  
jednakostraničan trougao, kvadrat, itd.

**Dve najpoznatije prizme su kocka i kvadar, pa vam predlažemo da najpre njih proučite:**

## KOCKA



$$P = 6a^2$$

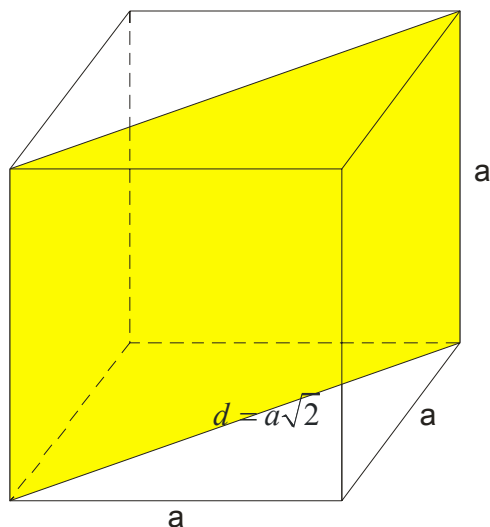


$$V = a^3$$

**Kocka** ima 12 ivica dužine  $a$ .

Mala dijagonala (dijagonala osnove) je  $d = a\sqrt{2}$ .

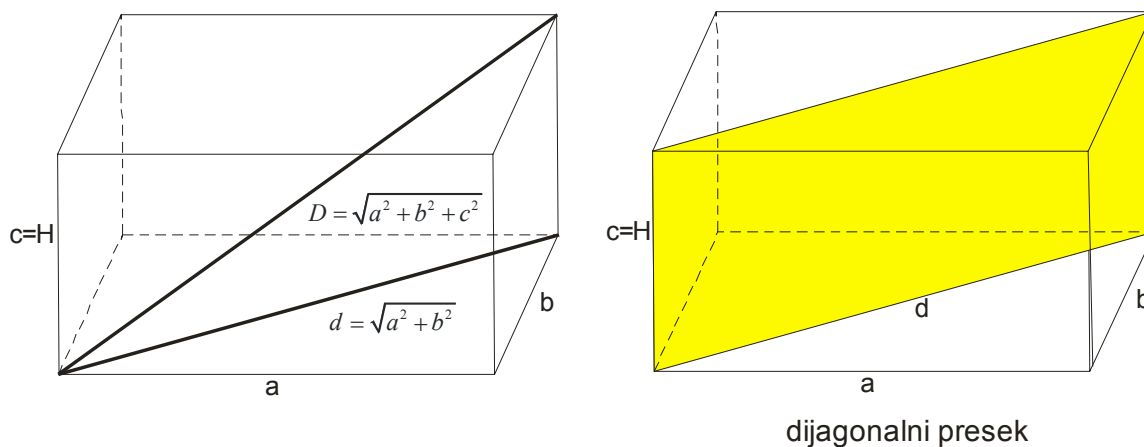
Velika (telesna) dijagonala je  $D = a\sqrt{3}$



dijagonalni presek

Površina dijagonalnog preseka se računa po formuli:  $P_{DP} = a^2\sqrt{2}$

## KVADAR



$$P = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

Mala dijagonala ( dijagonala osnove) se računa  $d^2 = a^2 + b^2$  to jest  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Velika dijagonala se računa  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$  to jest  $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Dijagonalni presek je pravougaonik površine  $P_{DP} = d \cdot c$

---

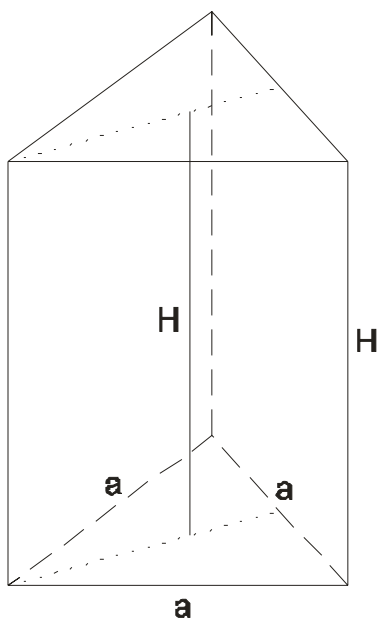
**Površina svake prizme se izražava formulom:**

$$P = 2B + M$$

**Zapremina svake prizme se izračunava formulom:**

$$V = B \cdot H$$

**PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA**



$B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  je površina osnove(baze)

$M = 3aH$  je površina omotača

$$P = 2B + M$$

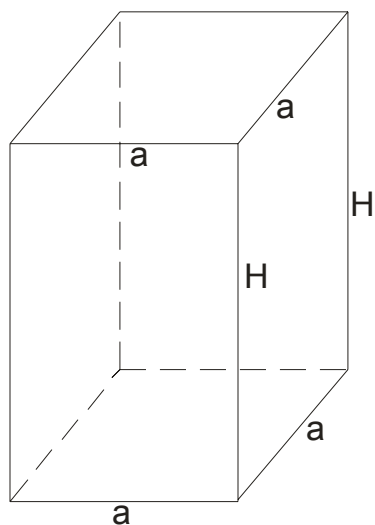
$$P = 2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

**PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PRIZMA**



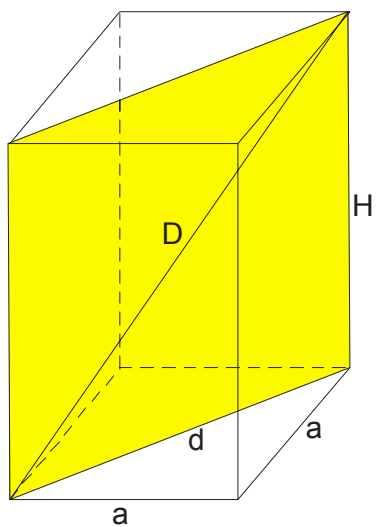
$$B = a^2 \quad M = 4aH$$

$$P = 2B + M$$

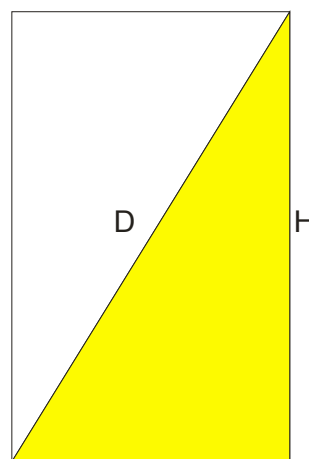
$$P = 2a^2 + 4aH$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = a^2 \cdot H$$



dijagonalni presek



$$d = a\sqrt{2}$$

dijagonalni presek

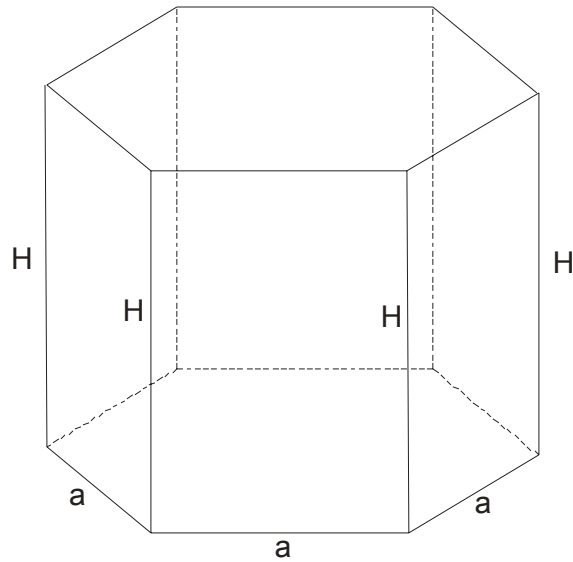
$$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + H^2$$

Površina dijagonalnog preseka se izračunava:

$$P = d \cdot H$$

$$P = aH\sqrt{2}$$

**PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PRIZMA**



$$B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$M = 6aH$$

$$P = 2B + M$$

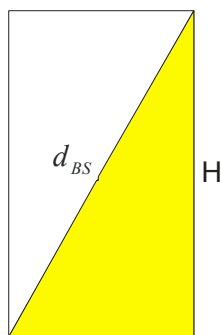
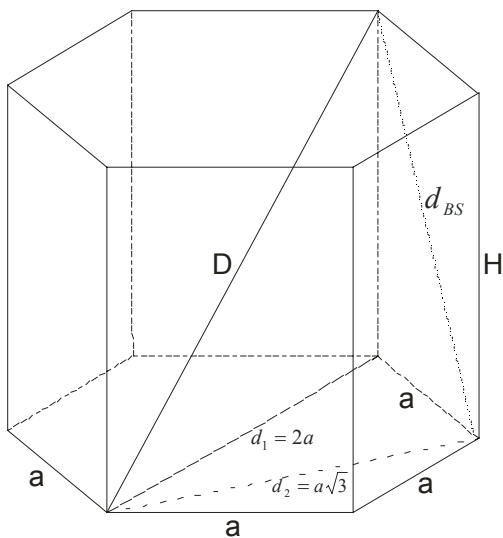
$$V = B \cdot H$$

$$P = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 6aH$$

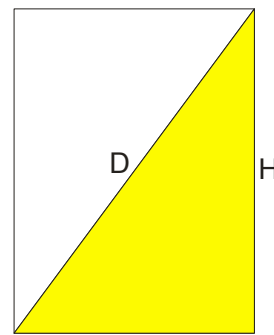
$$V = 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot H$$

$$P = 3a^2 \sqrt{3} + 6aH$$

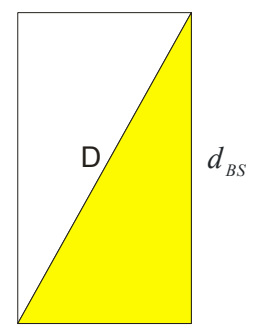
$$V = \frac{3a^2 H \sqrt{3}}{2}$$



Bočna strana  
 $d_{BS}^2 = H^2 + a^2$

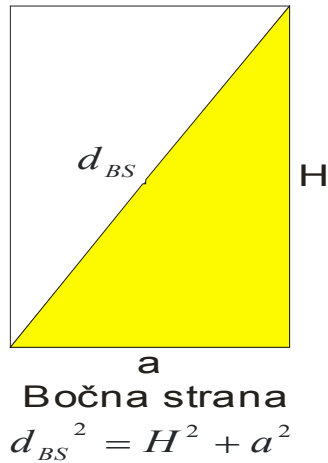


$d_1 = 2a$   
Veći dijagonalni presek



$d_2 = a\sqrt{3}$   
Manji dijagonalni presek

Još samo da vam napomenemo da primena Pitagorine teoreme na bočnu stranu :



važi kod svake od navedenih pravilnih prizmi!

### ZADACI

1) Ako se ivica kocke produži za 3cm, površina joj se poveća za  $198\text{ cm}^2$ . Izračunati površinu i zapeminu kocke.

Obeležimo ivicu kocke sa  $a$ . Njena površina je  $P = 6a^2$

Ako se ivica kocke poveća za 3cm, njena ivica će biti  $(a+3)$  a površina  $P_1 = 6(a+3)^2$

Prema tekstu zadatka će biti:

$$P_1 - P = 198\text{ cm}^2$$

$$6(a+3)^2 - 6a^2 = 198 \rightarrow \text{Sve podelimo sa 6}$$

$$(a+3)^2 - a^2 = 33$$

$$\cancel{a^2} + 6a + 9 - \cancel{a^2} = 33$$

$$6a = 33 - 9$$

$$6a = 24$$

$$a = 6\text{ cm}$$

$$P = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$P = 6 \cdot 6^2$$

$$V = 6^3$$

$$P = 6 \cdot 36$$

$$V = 216\text{ cm}^3$$

$$P = 216\text{ cm}^2$$

**2) Ivice dve kocke stoje u razmeri 4:3. Kolike su im površine i zapremine ako im se površine razlikuju za  $168\text{ cm}^2$  ?**

Obeležimo sa  $a$  stranicu jedne kocke a sa  $a_1$  stranicu druge kocke.

$$a : a_1 = 4 : 3 \Rightarrow a = 4k \quad \text{i} \quad a_1 = 3k$$

$$P - P_1 = 168$$

$$6a^2 - 6a_1^2 = 168 \rightarrow \text{Delimo sve sa 6}$$

$$a^2 - a_1^2 = 28$$

$$(4k)^2 - (3k)^2 = 28$$

$$16k^2 - 9k^2 = 28$$

$$7k^2 = 28$$

$$k^2 = 4$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot k = 4 \cdot 2 = 8\text{ cm}$$

$$a_1 = 3k = 3 \cdot 2 = 6\text{ cm}$$

Sada nije teško naći  $P$  i  $V$ .

$$P = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384\text{ cm}^2$$

$$V = a^3 = 8^3 = 512\text{ cm}^3$$

$$P = 6a_1^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216\text{ cm}^2$$

$$V = a_1^3 = 6^3 = 216\text{ cm}^3$$

**3) Dimenzije kvadra su tri uzastopna cela broja, a dijagonala je  $\sqrt{149}\text{ cm}$ . Izračunati površinu i zapreminu kvadra.**

Tri uzastopna cela broja možemo obeležiti sa  $x-1$ ,  $x$ ,  $x+1$

$$a^2 + b^2 + c^2 = D^2$$

$$a = x - 1$$

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = \sqrt{149}^2$$

$$b = x$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 149$$

$$c = x + 1$$

$$3x^2 = 149 - 1 - 1$$

$$a = x - 1 = 6\text{ cm}$$

$$x^2 = \frac{147}{3}$$

$$b = x = 7\text{ cm}$$

$$x^2 = 49$$

$$c = x + 1 = 8\text{ cm}$$

$$x = 7\text{ cm}$$

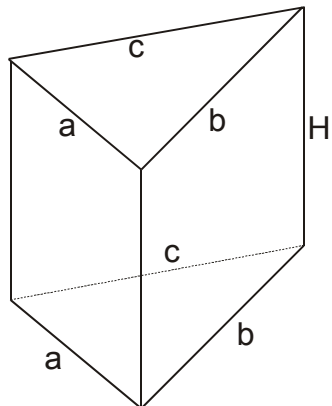
$$P = 2(ab + ac + bc) = 2(6 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 8) = 2 \cdot 146$$

$$P = 292\text{ cm}$$

$$V = abc = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336\text{ cm}^3$$



4) Dužine osnovnih ivica prave trostrane prizme odnose se kao 17:10:9, dužina bočne ivice je 16cm, a površina 1440 cm<sup>2</sup>. Odrediti dužine osnovnih ivica.



$$a : b : c = 17 : 10 : 9$$

$$H = 16\text{cm}$$

$$P = 1440\text{cm}^2$$

$$a = ?, b = ?, c = ?$$

$$\text{Iz } a : b : c = 17 : 10 : 9 \Rightarrow a = 17k, b = 10k, c = 9k$$

$$P = 2B + M$$

Bazu ćemo izraziti preko Heronovog obrasca

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$B = \sqrt{18k \cdot 1k \cdot 8k \cdot 9k}$$

$$B = \sqrt{1296k^4}$$

$$B = 36k^2$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{17k+10k+9k}{2}$$

$$s = 18k$$

$$M = aH + bH + cH = H(a+b+c)$$

$$M = 16 \cdot 38k$$

$$M = 576k$$

$$\boxed{P = 2B + M}$$

$$1440 = 2 \cdot 36k^2 + 576k$$

$$72k^2 + 576k - 1440 = 0 \rightarrow \text{Podelimo sve sa 72}$$

$$k^2 + 8k - 20 = 0 \rightarrow \text{kvadratna po "k"}$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm 12}{2} \rightarrow k = 2 \Rightarrow$$

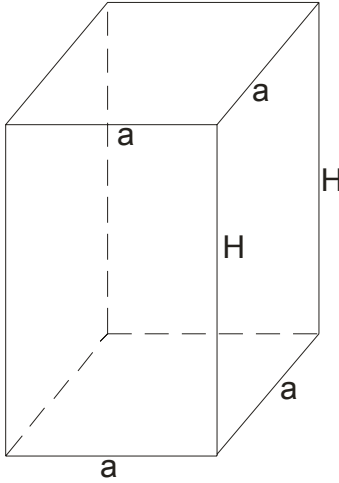
$$a = 17 \cdot 2 = 34\text{cm}$$

$$b = 10 \cdot 2 = 20\text{cm}$$

$$c = 9 \cdot 2 = 18\text{cm}$$

5) Prava pravilna četverostrana prizma ima visinu 16cm i površinu  $370\text{ cm}^2$ .

Izračunati osnovnu ivicu.



$$H = 16\text{cm}$$

$$P = 370\text{cm}^2$$

---


$$a = ?$$

$$P = 2B + M$$

$$P = 2a^2 + 4aH$$

$$370 = 2a^2 + 4a \cdot 16$$

$$370 = 2a^2 + 64a$$

$$2a^2 + 64a - 370 = 0$$

$$a^2 + 32a - 185 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-32 \pm 42}{2}$$

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = -38 \rightarrow \text{Nemoguće}$$

$$a = 5$$

Dakle osnovna ivica je  $a = 5\text{cm}$

*NAPOMENA:*

**Neispravno je reći osnovna ivica je... već bi trebalo dužina osnovne ivice je...**

Ako Vaš profesor insistira na ovome ispoštujte ga, jer je svakako u pravu.

**Sve je stvar dogovora....**

6) Izračunati površinu i zapreminu prave trostrane jednakoivične prizme ivice

$$a = 8\text{ cm}$$

Podatak da je u pitanju jednakoivična prizma nam govori da je osnovna ivica jednaka visini. To jest, omotač se ovde sastoji iz 3 kvadrata stranice  $a$

$$a = 8$$

$$P = 2B + M$$

$$P = 2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3a^2$$

$$P = 2 \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 8^2$$

$$P = \frac{64\sqrt{3}}{2} + 64 \cdot 3$$

$$P = (32\sqrt{3} + 192)\text{ cm}^2 \rightarrow \text{Ovde ne bi bilo loše da se izvuče zajednički ispred zagrade!}$$

$$P = 32(\sqrt{3} + 6)\text{ cm}^2$$

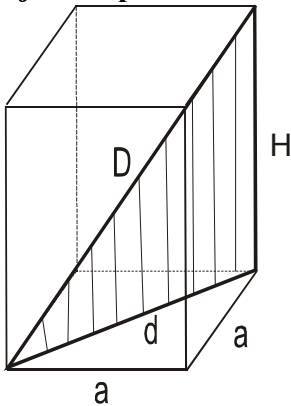
$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{8^3 \sqrt{3}}{4} = \frac{512\sqrt{3}}{4}$$

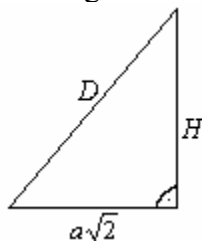
$$V = 128\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

7) Pravilna četverostrana prizma ima omotač  $8\text{ m}^2$  i dijagonalu  $3\text{ m}$ . Izračunati njenu zapreminu.



$$\text{Pošto je } M = 4aH \Rightarrow 4aH = 8 \Rightarrow aH = 2$$

Iz trougla:



$$\text{je } H^2 + (a\sqrt{2})^2 = D^2$$

$$H^2 + 2a^2 = 9$$

Npravimo sistem:

$$aH = 2 \Rightarrow H = \frac{2}{a} \rightarrow \text{Zamenimo u drugu jednačinu}$$

$$H^2 + 2a^2 = 9$$

$$\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 2a^2 = 9$$

$$\frac{4}{a^2} + 2a^2 = 9 \rightarrow \text{Smena: } a^2 = t$$

$$\frac{4}{t} + 2t = 9$$

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$a^2 = 4$$

ili

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = 2m$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$H = \frac{2}{a}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$H = 1m$$

$$V = a^2 \cdot H$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}m$$

$$V = 2^2 \cdot 1$$

$$H = 2\sqrt{2}m$$

$$V = 4m^3$$

$$V = a^2 \cdot H$$

$$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{2}{4} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$V = \sqrt{2}m^3$$

**Pazi:** Ovde imamo 2 moguća rešenja, i oba su "dobra" jer zadovoljavaju zadate početne uslove!!!

**8) Odrediti površinu i zapreminu kocke u funkciji površine dijagonalnog preseka.**

Površina dijagonalnog preseka je:

$$Q = a^2 \sqrt{2}$$

$$a^2 = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \rightarrow \text{Racionališemo}$$

$$a = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$P = 6a^2 = 6 \cdot \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{6Q}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}Q$$

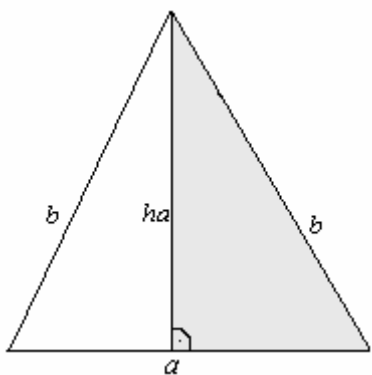
$$V = 6a^3 = 6 \cdot \left( \frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2} \right)^3 = \frac{6\sqrt{Q}^3 \cdot \sqrt[4]{8^3}}{8}$$

$$V = \frac{6\sqrt{Q}^3 \cdot \sqrt[4]{4^4 \cdot 2}}{8} = \frac{6\sqrt{Q}^3 \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{2}}{8} = 3\sqrt{Q}^3 \sqrt[4]{2}$$

$$V = 3Q\sqrt{Q}\sqrt[4]{2}$$

Pazi (na sredjivanje):  $\sqrt[4]{8^3} = \sqrt[4]{(2^3)^3} = \sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^8} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[4]{2} = 4 \cdot \sqrt[4]{2}$

**9) Osnova prava prizme je jednakostranični trougao osnovice 10dm, a visina tog trougla jednaka je visini prizme. Ako je zapremina prizme  $720dm^3$ , izračunati površinu prizme.**



$$a = 10dm$$

$$h_a = H$$

$$V = 720dm^3$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a \cdot h_a}{2} \cdot H$$

$$720 = \frac{10 \cdot H}{2} \cdot H$$

$$720 = 5H^2$$

$$H^2 = 144$$

$$H = 12dm$$

$$h_a = 12dm$$

Primenimo Pitagorinu teoremu na jednakokraki trougao:

$$b^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2 + h_a^2$$

$$P = 2B + M$$

$$b^2 = \left( \frac{10}{2} \right)^2 + 12^2$$

$$P = 2 \cdot \frac{ah_a}{2} + aH + 2bH$$

$$b^2 = 5^2 + 12^2$$

$$P = ah_a + H(a + 2b)$$

$$b^2 = 169$$

$$P = 10 \cdot 12 + 12 \cdot (10 + 26)$$

$$b = 13dm$$

$$P = 120 + 432$$

$$P = 552dm^2$$

10) Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale  $d_1 = 18\text{cm}$ ,  $d_2 = 24\text{cm}$ , dok je dijagonala bočne stranice prizme  $d = 39\text{cm}$ . Izračunati površinu prizme.

Najpre primenimo Pitagorinu teoremu na romb.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

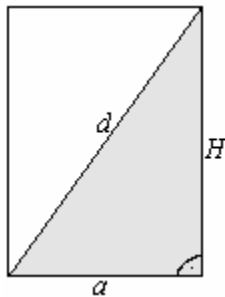
$$a^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2$$

$$a^2 = 81 + 144$$

$$a^2 = 225$$

$$a = 15\text{cm}$$

Pogledajmo jednu bočnu stranu:



$$H^2 = d^2 - a^2$$

$$H^2 = 39^2 - 15^2$$

$$H^2 = 1521 - 225$$

$$H^2 = 1296$$

$$H = 36\text{cm}$$

$$P = 2B + M$$

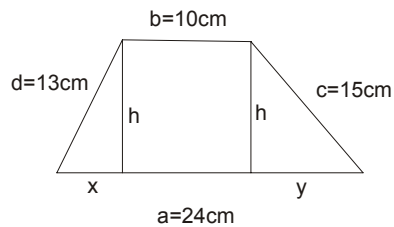
$$P = 2 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{2} + 4aH$$

$$P = 18 \cdot 24 + 4 \cdot 15 \cdot 36$$

$$P = 432 + 2160$$

$$P = 2592\text{cm}^2$$

11) Osnova prizme je trapez čije su osnove 24cm i 10cm, a kraci 13cm i 15cm. Izračunati površinu i zapreminu ako je njena visina jednaka visini trapeza.



→ Spustimo visine i obeležimo ‘‘deliće’’ sa x i y

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= d^2 - x^2 \\ h^2 &= c^2 - y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^2 - x^2 = c^2 - y^2$$

$$169 - x^2 = 225 - y^2$$

$$y^2 - x^2 = 225 - 169$$

$$y^2 - x^2 = 56$$

$$(y - x)(y + x) = 56$$

Kako je  $x + y = a - b$

$$x + y = 14 \quad \text{Imamo}$$

$$(y - x) \cdot 14 = 56$$

$$y - x = 4$$

Sada imamo sistem:

$$\left. \begin{aligned} y + x &= 14 \\ y - x &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2y &= 18 \\ y &= 9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Vratimo se u:

$$h^2 = c^2 - y^2$$

$$h^2 = 15^2 - 9^2$$

$$h^2 = 225 - 81$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

$$H = 12 \text{ cm}$$

$$P = 2B + M$$

$$B = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$B = \frac{24+10}{2} \cdot 12$$

$$B = 17 \cdot 12$$

$$B = 204 \text{ cm}^2$$

**PAZI:** M se sastaju iz četiri različita pravougaonika:

$$M = H(a + b + c + d)$$

$$V = B \cdot H$$

$$M = 12 \cdot (24 + 10 + 13 + 15)$$

$$V = 204 \cdot 12$$

$$M = 12 \cdot 62$$

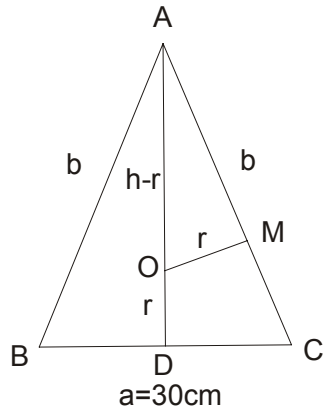
$$V = 2448 \text{ cm}^3$$

$$M = 744 \text{ cm}^2$$

$$P = 2 \cdot 204 + 744$$

$$P = 1152 \text{ cm}^2$$

12) Osnova prizme je jednakokraki trougao osnovice 30cm i poluprečnik upisane kružnice je 10cm. Izračunati zapreminu prizme ako je njena visina jednaka visini trougla koja odgovara osnovici.



$$a = 30\text{cm}$$

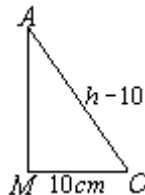
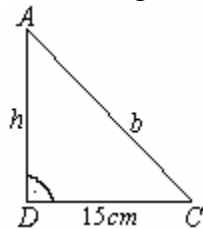
$$r = 10\text{cm}$$

$$ha = H$$

$$V = ?$$

### INačin

Iz sličnosti trouglova trougla ADC i trougla AMO



$$\Rightarrow 15 : 10 = b : (h - 10)$$

$$15(h - 10) = 10b$$

$$15h - 150 = 10b$$

$$3h - 30 = 2b$$

$$h = \frac{2b + 30}{3}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$$

$$15^2 + \left(\frac{2b + 30}{3}\right)^2 = b^2$$

$$225 + \left(\frac{4b^2 + 120b + 900}{9}\right) = b^2 \dots\dots / \cdot 9$$

$$2025 + 4b^2 + 120b + 900 = 9b^2$$

$$5b^2 - 120b - 2925 = 0$$

$$b^2 - 24b - 585 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{24 \pm 54}{2}$$

$$b_1 = 39\text{cm}$$

$$b_2 = -15 \rightarrow \text{Nemoguće}$$

$$b = 39\text{cm}$$



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2 = b^2$$

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_a^2 = 39^2 - \left(\frac{30}{2}\right)^2$$

$$h_a^2 = 1521 - 225$$

$$h_a^2 = 1296$$

$$h_a = 36\text{cm}$$

Sada je  $h_a = 36\text{cm} = H$

$$B = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{30 \cdot 36}{2} = 540$$

$$V = BH$$

$$V = 540 \cdot 36$$

$$V = 19440\text{cm}^3$$

Ovaj zadatak smo mogli rešiti i na drugi način.

## II Način

Znamo obrasce za površinu:

$$P = r \cdot S \quad \text{i} \quad P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{to jest: } S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+2b}{2} = \frac{30+2b}{2} = \frac{\cancel{2}(15+b)}{\cancel{2}}$$
$$S = 15+b$$

$$P = \sqrt{(15+b)(15+b-30)(15+b-b)(15+b-b)}$$

$$P = \sqrt{(15+b)(b-15) \cdot 15^2}$$

$$P = 15\sqrt{b^2 - 15^2} = 15\sqrt{b^2 - 225}$$

S druge strane je

$$P = r \cdot s = 10 \cdot (15+b)$$

$$P = P$$

$$10(15+b) = 15\sqrt{(b-15)(b+15)}$$

$$100(15+b)^2 = 15^2(b-15)(b+15)$$

$$100(15+b) = 225(b-15)$$

$$1500 + 100b = 225b - 3375$$

$$100b - 225b = -3375 - 1500$$

$$-125b = -4875$$

$$b = 39\text{cm}$$

