

## ISKAZI

U svakodnevnom govoru, a i u pisanom tekstu, obično se sreću rečenice koje su ili tačne ili netačne, tj rečenice koje imaju logičkog smisla. Ovakve rečenice se u matematici nazivaju iskazi. Dakle, **pod iskazom podrazumevamo bilo koju rečenicu za koju se zna da može biti samo tačna ili samo netačna**. Drugim rečima, iskaz može da ima samo jednu od istinitosnih vrednosti: istinit (tačan), neistinit (netačan).

Primer:

Nije teško videti koja je od sledećih rečenica iskaz:

- Broj 6 je veći od broja 2
- Broj 3 je deljiv brojem 2
- Zemlja se okreće oko Sunca
- Broj 2 je veći od Nataše
- Godina ima 365 dana

Prve tri rečenice jesu iskazi, jer su redom tačna, netačna i tačna, dok za zadnje dve rečenice ne možemo to tvrditi, dakle, nisu iskazi.

**Iskaze ćemo, po dogovoru, obeležavati malim slovima latinice: p,q,r,s,t....a**

ta slova ćemo zvati iskazna slova. Polazeći od takvih elementarnih iskaza, dakle, iskaznih slova, slično kao što u srpskom jeziku od prostih rečenica pravimo složene, možemo napraviti i složene iskaze. Tu će za nas biti značajno da znamo kada će ti novi iskazi biti tačni ili netačni.

U tom cilju uvodimo oznake :

**T – za tačno (čita se te) i  $\perp$  - za netačno ( čita se ne-te)**

Istinitosna vrednost nekog iskaza p, koji ćemo označavati sa  $\tau$  (p) (čita se tau od te), biće:

$\tau(t)=T$ , ako je iskaz p tačan  
 $\tau(t)=\perp$ , ako je iskaz p netačan

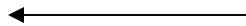
## LOGIČKE OPERACIJE

Neka su dati iskazi p i q.

**Konjunkcija** iskaza p i q je iskaz  $p \wedge q$  kojem odgovara sledeća istinitosna tablica:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

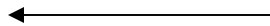
**Konjunkcija je tačna samo ako su p i q tačni iskazi.**



**Disjunkcija** iskaza p i q je iskaz  $p \vee q$  kojem odgovara sledeća tablica:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

**Disjunkcija je netačna samo ako su oba iskaza , i p i q, netačni.**



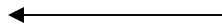
Ovde treba obratiti pažnju na razliku između upravo definisanog veznika disjunkcije i veznika takozvane **isključne disjunkcije** kojem odgovara jezička forma “**ili...,ili...**”.

Razlika je u tome što iskaz “ili p ili q” nije tačan ni u slučaju kada su oba iskaza , i p i q, tačni, dok je iskaz “p ili q” tačan.

**Implikacija** iskaza  $p$  i  $q$  je iskaz  $p \Rightarrow q$  kojem odgovara sledeća tablica:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T
<b>T</b>	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

**Implikacija je netačna jedino u slučaju kada je iskaz  $p$  tačan i iskaz  $q$  netačan.**



Jedan od najznačajnijih veznika za nas je upravo veznik implikacije. Rečenica

“ **$p$  implicira  $q$** ” se sa nepromenjenim značenjem može zapisati i na jedan od sledećih načina:

“ ako  $p$ , onda  $q$ ”

“ iz  $p$  sledi  $q$ ”

“ $q$ , ako  $p$ ”

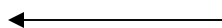
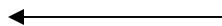
“  $p$  je dovoljan uslov za  $q$ ”

“  $q$  je potreban uslov za  $p$ ”

**Ekvivalencija** iskaza  $p$  i  $q$  je iskaz  $p \Leftrightarrow q$  čije se istinitosne vrednosti zadaju tablicom:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

**Ekvivalencija je tačna samo ako oba iskaza,  $p$  i  $q$ , imaju istu istinitostnu vrednost.**



Rečenicu “**p je ekvivalentno sa q**” možemo iskazati i na jedan od sledećih načina:

“ ako p , onda q, i ako q, onda p”

“ p je potreban i dovoljan uslov za q”

“ p ako i samo ako q”

To su bili osnovni **binarni** logički veznici (operacije). Binarni , zato što dva iskaza prave jedan novi iskaz. Uvešćemo sada jedan **unarni** veznik (operaciju), koji od jednog iskaza p pravi jedan novi iskaz , složeniji. To je  $\neg p$  , koji se čita “ne-p”.

**Negacija** iskaza p je iskaz  $\neg p$  kojem odgovara tablica:

P	$\neg p$
T	$\perp$
$\perp$	T

**Očigledno je iskaz  $\neg p$  tačan samo u slučaju kada je iskaz p netačan.**

Zajedno, iskazne konstante (T i  $\perp$ ), sva iskazna slova i sve složene iskaze nazivamo **iskaznim formulama**. Da bi jedna iskazna formula bila nedvosmisleno zapisana, prilikom zapisivanja koristimo i zagrade. Polazimo od toga da je **negacija operacija najvišeg prioriteta**, za njom su konjunkcija i disjunkcija, koje su međusobno ravnopravne, na kraju su implikacija i ekvivalencija, takođe međusobno ravnopravne.

**Primer:**

Niz simbola  $p \wedge q \vee r$  **ne možemo** prihvatiti kao formulu, jer se ne zna redosled operacija, pošto su konjunkcija i disjunkcija “iste snage”. Trebalo bi biti zapisano na sledeći način:  $(p \wedge q) \vee r$  ili  $p \wedge (q \vee r)$  .

Dakle, iskazne formule su iskazi formirani od iskaznih slova  $p, q, r, \dots$ , znakova

$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$  i zagrada, primenom konačnog broja puta ovih simbola.

**Iskazne formule koje su uvek, za sve moguće vrednosti iskaznih slova koja čine te formule tačne, nazivamo tautologijama.**

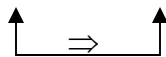
Da li je neka formula tautologija možemo proveriti na više načina: diskusijom po slovu, svođenjem na protivrečnost, preko istinitosnih tablica, itd.

Evo jednog primera ispitivanja preko istinitosne tablice:

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

**Pazi: Uvek prvo napisi negacije, jer su najstarija operacija**

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$	T	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	T	T



## NEKA PRAVILA LOGIČKOG ZAKLJUČIVANJA

Tautologije, kao uvek tačni iskazi, u sebi kriju zakonitosti po kojima se vladaju logički veznici, pa, prema tome, i zakonitosti pravilnog logičkog zaključivanja. neka od nezaobilaznih i najčešće primenjivanih, a ujedno i najjednostavnijih logičkih zakona su:

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad \text{modus ponens}$$

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \quad \text{pravilo kontrapozicije (ispitano u tablici)}$$

$$(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p \quad \text{svođenje na protivrečnost}$$

$p \vee \neg p$  zakon isključenja trećeg

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$  De Morganovi zakoni

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$  zakon dvojne negacije itd.

**Ispitajmo modus ponens upotrebom svodenja na protivrečnost:**

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

**Pretpostavimo da je formula netačna.** Budući da je implikacija netačna samo u jednom slučaju, onda mora biti:

$$\tau(p \wedge (p \Rightarrow q)) = T \quad \text{i} \quad \tau(q) = \perp$$

Dalje, kako je konjunkcija tačna samo ako su oba izraza tačna, mora biti:

$$\tau(p) = T \quad \text{i} \quad \tau(p \Rightarrow q) = T$$

Pogledajmo tablicu za implikaciju: Pošto smo zaključili da je  $\tau(p) = T$  i  $\tau(q) = \perp$

mora biti  $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$  što je u kontradikciji sa

$$\tau(p \Rightarrow q) = T.$$

Znači da polazna pretpostavka nije dobra, odnosno da je formula tautologija (tačna).

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
<b>T</b>	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

PRIMERI:

1. Dati su iskazi : p:  $(-2)(-3)=-(-6)$ ; q:  $\frac{1}{5}=0,2$  ; r:  $-3^2=(-3)^2$

Ispitati istinitostnu vrednost izraza:  $\neg p \Rightarrow (q \vee r)$

**Resenje:** Kod ovog tipa zadatka najpre odredimo vrednosti iskaza p,q,r , pa te vrednosti zamenimo u datu formulu.(ovde nije potrebno praviti celu tablicu, vec samo jednu vrstu , za dobijene vrednosti za p,q,r)

Dakle:

$(-2)(-3)=6$  i  $-(-6)=6$ , pa je iskaz p- tacan , to jest  $\tau(p) = T$

$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ , pa je i iskaz q – tacan, to jest  $\tau(q)=T$

$-3^2 = -9$  a  $(-3)^2=(-3)(-3)=9$  pa je iskaz r – netacan, to jest  $\tau(r) = \perp$

Zamenimo sada ove vrednosti u datoj formuli:

$\neg p \Rightarrow (q \vee r) = \neg T \Rightarrow (T \vee \perp) = \perp \Rightarrow T = T$ . Dakle , dati izraz je tacan.

2. Ispitati da li je sledeca formula tautologija(tablicno):

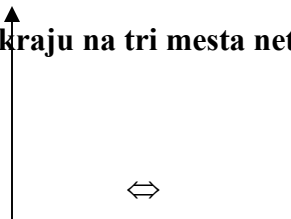
$$F: (\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((r \vee p) \wedge q)$$

Kad imamo tri iskazna slova, potrebno nam je 8 vrsta:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$r \vee p$	$(r \vee p) \wedge q$	F
T	T	T	$\perp$	T	T	T	T
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T	T
T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T	T	T	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

Dakle ova formula nije tautologija, jer ima na kraju na tri mesta netačno (dovoljno je i samo na jedno)

**ZAPAMTI:** kod p idemo 4 tačna, 4 netačna;  
 kod q 2 tačna ,2 netačna;  
 kod r jedno tačno ,1 netačno



## KVANTORI

Posmatrajmo rečenicu: “ $x^2 = 25$  “. Očigledno ona nije iskaz, jer može biti tačna ako je  $x = 5$  ili  $x = -5$ , a može biti i netačna ako je  $x$  neki drugi broj.

Ako, međutim rečenicu kažemo:

“ Za svaki  $x$ ,  $x^2 = 25$ ” ili “Postoji  $x$  tako da je  $x^2 = 25$ ”, onda za njih možemo reći da je prva netačna a druga tačna, pa one predstavljaju iskaze.

Upotrebom matematičke terminologije možemo zapisati:

“ Za svaki  $x$ ,  $x^2 = 25$ ” je  $(\forall x)(x^2 = 25)$

“Postoji  $x$  tako da je  $x^2 = 25$ ” je  $(\exists x)(x^2 = 25)$

Ove reči , **za svaki** (bilo koji, za proizvoljan), i **postoji** (ili za neki) **zovemo kvantori** ili kvantifikatori.

Dakle:

$\forall$  - se čita **za svaki** i zove se **univerzalni** kvantor,

$\exists$  - se čita **postoji** i zove se **egzistencijalni** kvantor

Zanimljivo je kako se kvantori ponašaju **u prisustvu negacije**:

$$\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A \quad \text{i}$$

$$\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$$

Rečima objašnjeno to bi značilo da **nije svaki** i **neki nije** imaju isto značenje, odnosno da izrazi **nije neki** i **svaki nije** imaju isto značenje.

Na primer, rečenice:” Nije svaki profesor dobar” i “ Postoji profesor koji nije dobar” imaju isto značenje.







