KVADRATNA JEDNAČINA $ax^2+bx+c=0$

Jednačina oblika $ax^2+bx+c=0$, gde je $x-$ nepoznata. a,b i c realni brojevi, $a\neq 0$, je kvadratna jednačina po x sa koeficijentima a,b i c.

Kvadratna jednačina je **potpuna** ako su koeficijenti $b\neq 0$ i $c\neq 0$. Ako je $b=0$ ili $c=0$ (ili oba) onda je kvadratna jednačina **nepotpuna.**
Nepotpuna kvadratne jednačine se rešavaju relativno lako.

Nepotpune kvadratne jednačine

$$ax^2+bx=0$$
$$x(ax+b)=0$$
$$x=0 \quad \vee \quad ax+b=0$$
$$x=-\frac{b}{a}$$

$$ax^2+c=0$$
$$ax^2=-c$$
$$x^2=-\frac{c}{a}$$
$$x=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

$$ax^2=0$$
$$x=0$$

Primeri:

$$2x^2+5x=0$$
$$x(2x+5)=0$$
$$x=0 \quad \vee \quad 2x+5=0$$
$$2x=-5$$
$$x=-\frac{5}{2}$$

$$4x^2-9=0$$
$$4x^2=9$$
$$x^2=\frac{9}{4}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$x=\pm\frac{3}{2}$$
$$x_1=\frac{3}{2}$$
$$x_2=-\frac{3}{2}$$

$$5x^2=0$$
$$x^2=\frac{0}{5}$$
$$x=0$$
$$x_1=x_2=0$$

Potpuna kvadratna jednačina:

$$ax^2+bx+c=0$$

Kvadratna jednačina ima dva rešenja: označavamo ih sa x_1 i x_2 i tradicionalno se piše

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

<u>Primer 1)</u> Reši jednačine:

a) $6x^2 - x - 2 = 0$
b) $x^2 - 2x + 1 = 0$
v) $x^2 - 4x + 5 = 0$

a) $6x^2 - x - 2 = 0$

$a = 6$ **<u>Pazi,</u>** kad nema broj ispred nepoznate uzimaš 1.

$b = -1$

$c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 17}{12}$$

$$x_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1$

$b = -2$

$c = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

v) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 1$

$b = -4$

$c = 5$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-20}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \frac{\cancel{2}(2 \pm i)}{\cancel{2}} = 2 \pm i$$

Dakle: $x_1 = 2 + i$
$x_2 = 2 - i$

Pazi jer je: $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2i$
$\sqrt{-1} = i$

www.matematiranje.com

Primer 2) Rešiti jednačinu:

$$(2x-3)^2+(x-1)(x+2)=2-11x$$

Rešenje: $(2x-3)^2+(x-1)(x+2)=2-11x$

$4x^2-12x+9+x^2+2x-x-2-2+11x=0$

$5x^2+5=0/:5$

$x^2+1=0 \rightarrow$ Nepotpuna kvadratna jednačina

$x^2=-1$

$x=\pm\sqrt{-1}$

$x_1=+i$

$x_2=-i$

Primer 3) Rešiti jednačinu:

$\frac{x}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{8}{x^2-4} \rightarrow$ najpre rastavimo na činioce imenilac

$\frac{x}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{8}{(x-2)(x+2)} \rightarrow$ Množimo sve sa NZS $=(x-2)(x+2)$ uz uslov:

$x(x+2)-3(x-2)=8$ $\qquad x\neq 2$ i $x\neq -2$

$x^2+2x-3x+6-8=0$

$x^2-x-2=0 \rightarrow$ Sad radimo kao kvadratnu jednačinu

$a=1$

$b=-1$

$c=-2$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}$$

$x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2 \rightarrow$ **PAZI:** nije rešenje jer $x\neq 2$

$x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \rightarrow$ Dakle $\boxed{x=-1}$

Primer 4) Grupa dečaka treba da podeli 400 klikera na jednake delove. Pre deobe 4 dečaka se odreknu svog dela, zbog čega je svaki od ostalih dobio po 5 klikera više. Koliko je u toj grupi bilo dečaka?

Obeležimo sa x-broj dečaka, y- broj klikera po dečaku

$x \cdot y = 400$

$(x-4) \cdot (y+5) = 400 \rightarrow$ Sredimo ovu drugu jednačinu...

$xy + 5x - 4y - 20 = 400$

$400 + 5x - 4y - 20 = 400$

$5x - 4y - 20 = 0 \rightarrow$ Iz prve jednačine izrazimo $y = \dfrac{400}{x}$

$5x - 4 \cdot \dfrac{400}{x} - 20 = 0 / \cdot x$

$5x^2 - 1600 - 20x = 0 \rightarrow$ (poredjamo)

$5x^2 - 20x - 1600 = 0 \rightarrow$ (podelimo sa 5)

$x^2 - 4x - 320 = 0 \rightarrow$ sad radimo kvadratnu jednačinu

$a = 1$

$b = -4$

$c = -320$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-320)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{4 \pm 36}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 36}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{4 - 36}{2} = -16 \rightarrow \textit{Nemoguće}$$

Dakle bilo je 20 dečaka u grupi.

<u>Priroda rešenja kvadratne jednačine</u>

Diskriminanta (**D**) kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ je izraz $b^2 - 4ac$ (ono pod korenom) Dakle: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$

Sada formulu za rešavanje možemo zapisati i kao: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Za kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c$ sa realnim koeficijentima važi:

1) Jednačina ima dva različita realna rešenja ako i smo ako je $D > 0$
($x_1 = x_2 \in R \;\; x_1 \neq x_2$ akko $D > 0$)

2) Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje ako i samo ako je $D = 0$
($x_1 = x_2 \in R$ akko $D = 0$)

3) Jednačina ima jedan par konjugovano kompleksnih rešenja akko je $D < 0$
$(x_1 = a + bi, x_2 = a - bi$ akko $D < 0)$

<u>Primer 1)</u> Ispitati prirodu rešenja kvadratnih jednačina u zavisnost od parametara:

a) $x^2 + 3x + m = 0$
b) $(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$

a) $x^2 + 3x + m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = m \end{array}$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m$$

1) $D > 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4m > 0$
$-4m > -9 \rightarrow$ **<u>PAZI:</u>** Okreće se znak
$m < \dfrac{-9}{-4}$
$m < \dfrac{9}{4}$

2) $D = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{9}{4}$

3) $D < 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4m < 0 \quad \Rightarrow \quad m > \dfrac{9}{4}$

Dakle: - za $m < \dfrac{9}{4}$ rešenja su realna i različita

- za $m = \dfrac{9}{4}$ rešenja su realna i jednaka
- za $m > \dfrac{9}{4}$ rešenja su konjugovano-kompleksni brojevi

b) $(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$

$a = n + 3$
$b = -2(n+1) \quad \Rightarrow \quad$ **PAZI:** ovde je odmah $n + 3 \neq 0$ da bi jednačina bila kvadratna
$c = n - 5$

$$D = b^2 - 4ac = \left[-2(n+1)\right]^2 - 4(n+3)(n-5)$$
$$= 4(n^2 + 2n + 1) - 4(n^2 - 5n + 3n - 15)$$
$$= \cancel{4n^2} + 8n + 4 \cancel{-4n^2} + 20n - 12n + 60$$
$$D = 16n + 64$$

1) $D > 0 \quad 16n + 64 > 0 \Rightarrow 16n > -64 \Rightarrow n > -4, n > -4 \quad x_1 \neq x_2 \in R$

2) $D = 0 \quad 16n + 64 = 0 \Rightarrow n = -4 \quad x_1 = x_2 \in R$

3) $D < 0 \quad 16n + 64 < 0 \Rightarrow n < -4 \quad x_1$ i x_2 su konjugovano-kompleksni brojevi.

Primer 2) Za koje vrednosti parametra $k \in R$ jednačina $kx^2 + (k+1)x + 2 = 0$ ima dvostruko rešenje?

Rešenje: Ovde nam treba da je $D = 0$ i naravno $a \neq 0$, jer ako je $a = 0$ jednačina nije kvadratna.

$$kx^2 + (k+1)x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = k \\ b = k+1 \\ c = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad k \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = k^2 + 2k + 1 - 8k = k^2 - 6k + 1$$
$$D = k^2 - 6k + 1 = 0$$

Sada rešavamo novu kvadratnu jednačinu ‘’po k’’

$$k^2 - 6k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{array}$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

Malo sredimo : $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

Pa je:

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$k_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

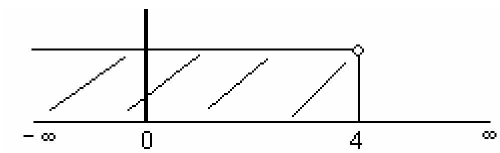
$$k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Ovo su rešenja za koja jednačina (početna) ima dvostruko rešenje!!!

<u>Primer 3)</u> Za koje vrednosti parametra $m \in R$ jednačina $mx^2 - 4x + 1$ ima realna i različita rešenja?

Rešenje: Ovde dakle mora biti $D > 0$ i naravno $a \neq 0$

$$\begin{aligned} a &= m \Rightarrow m \neq 0 \\ b &= -4 \quad \Rightarrow \\ c &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ D &= (-4)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \\ D &= 64 - 4m > 0 \\ 16 &- 4m > 0 \\ -4m &> -16 \\ m &< 4 \end{aligned}$$



nula ne sme!

Dakle, rešenje je $m \in (-\infty, 0) \cup (0, 4)$

<u>Primer 4)</u> Za koje vrednosti parametra m jednačina $x^2 - 8x + m$ ima konjugovano-kompleksno rešenja?

Rešenje: Mora biti $D < 0$ i $a \neq 0$

$$\begin{aligned} a &= 1 \neq 0 \\ b &= -8 \qquad \Rightarrow \\ c &= m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ D &= (-8)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \\ D &= 64 - 4m < 0 \\ -4m &< -64 \\ m &> 16 \Rightarrow m \in (16, \infty) \end{aligned}$$

<u>Primer 5)</u> Za koje vrednosti parametra $k \in R$ jednačina $kx^2 + 6x + 3 = 0$ nema realna rešenja?

Rešenje: Kad nema realna rešenja, znači da su konjugovano kompleksna, odnosno $D < 0$ i naravno $a \neq 0$.

$$kx^2+6x+3=0 \Rightarrow \begin{array}{l} a=k \\ b=6 \\ c=3 \end{array} \Rightarrow \quad k\neq 0$$

$$D=b^2-4ac$$
$$D=6^2-4\cdot k\cdot 3=36-12k$$
$$36-12k<0$$
$$-12k<-36$$
$$k>3 \Rightarrow k\in(3,\infty)$$

Primer 6) Za koje vrednosti parametra $m\in R$ jednačina $(2m+1)x^2-(2m+1)x+2{,}5=0$ ima realna i različita rešenja?

Rešenje: Ovde je $D>0$ i $a\neq 0$

$$a=2m+1$$
$$b=-(2m+1)$$
$$c=-2{,}5$$

$$a\neq 0 \Rightarrow \quad 2m+1\neq 0 \Rightarrow \quad m\neq -\frac{1}{2}$$

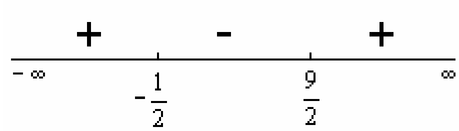
$$D=b^2-4ac$$
$$D=\left[-(2m+1)\right]^2-4\cdot\left[2m+1\right]\cdot 2{,}5$$
$$D=(2m+1)^2-10(2m+1)$$
$$D=4m^2+4m+1-20m-10$$
$$D=4m^2-16m-9>0$$

Rešimo najpre $4m^2-16m-9=0$

$$a=4$$
$$b=-16$$
$$c=-9$$

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$m_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256+144}}{8}=\frac{16\pm 20}{8}$$
$$m_1=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$$
$$m_2=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

(Pogledaj kvadratne nejednačine):



$D > 0 \rightarrow$ biramo gde je + $\quad m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$

www.matematiranje.com