# KORENOVANJE

Neka je $a$ realan i $n$ prirodan broj.
Svako rešenje jednačine

$$x^n = a$$

‘’po x’’ (ako postoji) naziva se $n$-ti koren broja $a$ u oznaci $x = \sqrt[n]{a}$.
Dakle: simbol $\sqrt[n]{a}$ označava:

1) $n-$ ti koren realnog broja $a$ u svim slučajevima kada je on jedinstven
$$(n \in N,\ n = 2k-1,\ k \in N,\ a \in R)$$
2) Pozitivan $n$-ti koren broja $a$ u slučaju
$$n = 2k,\ k \in N,\ a > 0$$

Ova definicija sigurno nije baš mnogo jasna!!! Ajde da vidimo par primera:

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2; \quad \sqrt[7]{0} = 0$$

---

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2^2} = 2; \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

Pazi: $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2; \quad -\sqrt[4]{16} = -\sqrt[4]{2^4} = -2$

Pogrešno je pisati: $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ **<u>ZAPAMTI!!!</u>**

<u>Važi:</u>

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n- \ neparan \\ |a|, & n- \ paran \end{cases}$$

**<u>Primeri:</u>** (pazi, dogovor je da je $\sqrt{A} = \sqrt[2]{A}$, to jest, jedino se ovde ne piše broj 2)

$\sqrt{9} = \sqrt{3^2}$ ; $\sqrt[3]{2^3} = 2$

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ ; $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

**ZAPAMTI:** Kad vidiš 2, 4, 6,… (parni koren) iz nekog konkretnog broja, rešenje je uvek pozitivan broj. Kad vadiš 3, 5, 7… (neparan koren) iz nekog broja, rešenje može biti i negativan broj, u zavisnosti kakva je potkorena veličina.

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \qquad \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\sqrt[4]{(-7)^4} = |-7| = 7 \qquad \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

$$\sqrt[6]{(-12)^6} = |-12| = 12 \qquad \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^5} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt[8]{\left(-\frac{1}{3}\right)^8} = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \qquad \sqrt[7]{\left(-\frac{3}{5}\right)^7} = -\frac{3}{5}$$

Primer: Za koje realne brojeve x je tačna vrednost:

a) $\sqrt{x^2} = x$
b) $\sqrt[3]{x^3} = -x$
v) $\sqrt{x^2} = -x$
g) $\sqrt{x^4} = \left(\sqrt{x}\right)^4$

---

Rešenje: a) $\sqrt{x^2} = x$ je tačna samo za vrednosti x koje su veće ili jednake nuli, jer

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \\ 0, & za\ x = 0 \end{cases}$$

Dakle $x \geq 0$

b) $\sqrt[3]{x^3} = -x$ je tačka samo za $x = 0$ !!! Zašto? Ako uzmemo da je x negativan broj, na primer $x = -5 \Rightarrow \sqrt[3]{(-5)^3} = -5 \neq -(-5) = +5$, a ako uzmemo $x > 0$, recimo $x = 10$ $\sqrt[3]{10^3} = 10 \neq -10$

v) $\sqrt{x^2} = -x$, x mora biti manje od nule, ili nula jer kao malopre važi:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

, Dakle $x \leq 0$

g) $\sqrt{x^4} = \left(\sqrt{x}\right)^4$, Ovde mora biti $x \geq 0$. Zašto? Zbog $\left(\sqrt{x}\right)^4$ koji ne može biti negativan odnosno mora biti $x > 0$

Pravila:

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
6) $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($p$ se skrati)

Moramo naglasiti da pravila važe pod uslovima da je: $a, b \rightarrow$ pozitivni realni brojevi $m, n, p \rightarrow$ prirodni brojevi.

Zadaci:

**1)**

**a)** Izračunaj $\sqrt{36} - 2\sqrt{25} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[5]{32}$

$\sqrt{36} - 2\sqrt{25} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[5]{32} =$

$= 6 - 2 \cdot 5 + \sqrt[4]{2^4} - \sqrt[5]{2^5} =$

$= 6 - 10 + 2 - 2 = -4$

**b)** Izračunaj $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[4]{16}$

$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \sqrt[4]{2^4} =$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4$

**c)** Izračunaj $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt{4}$

$\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt{4} =$

$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \sqrt[3]{(-3)^3} - 2 = \frac{2}{3} - 3 - 2 = \frac{2}{3} - 5 = -4\frac{1}{3}$

**d)** Izračunaj $\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{(-8)}\cdot\sqrt[5]{-32}$

$$\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{(-8)}\cdot\sqrt[5]{-32}=$$
$$=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt[3]{(-2)^3}\cdot\sqrt[5]{(-2)^5}=$$
$$=3\cdot(-2)\cdot(-2)=12$$

**2)** Izračunaj $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}$

$$\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=|x-5|+|x+5|$$

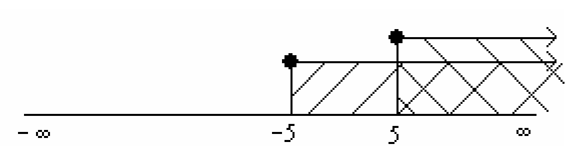
Kako je:

$$|x-5|=\begin{cases}x-5, & za \quad x-5\geq 0\\ -(x-5), & za \quad x-5<0\end{cases}=\begin{cases}x-5, & za \; x\geq 5\\ -(x-5), & za \; x<5\end{cases} \quad \text{i}$$

$$|x+5|=\begin{cases}x+5, & za \quad x+5\geq 0\\ -(x+5), & za \quad x+5<0\end{cases}=\begin{cases}x+5, & za \; x\geq -5\\ -(x+5), & za \; x<-5\end{cases}$$

moramo najpre videti ‘’ gde ima’’ rešenja

**I** za $x\geq 5$ i $x\geq -5$

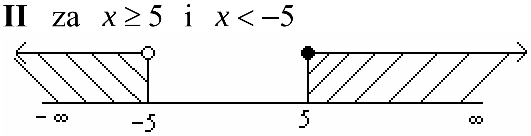



$$|x-5|+|x-5|=x-5+x+5=2x$$

$x\in[5,\infty)$

---

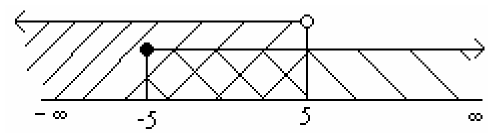
**II** za $x\geq 5$ i $x<-5$




Nema rešenja

---

**III** za $x < 5$ i $x \geq -5$

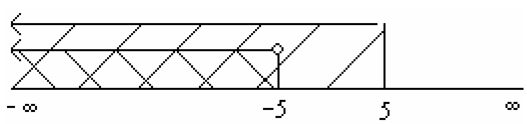



$$|x-5|+|x-5| = -x+5+x+5 = +10$$

$x \in [-5,5)$

---

**IV** za $x < 5$ i $x < -5$




$$|x-5|+|x+5| = -x+5-x-5 = -2x$$

**Konačno**: $|x-5|+|x+5| = \begin{cases} -2x, & x < -5 \\ 10, & -5 \leq x < 5 \\ 2x, & x \geq 5 \end{cases}$

**<u>Racionalisanje</u>**

Koristeći se osobinama korena, možemo, u cilju uprošćavanja nekog izraza, odstraniti korene ili ih premestiti na željeno mesto.

<u>Primeri:</u>

**1)** $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**2)** $\frac{9}{\sqrt{12}} = \frac{9}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{9\sqrt{12}}{12} = \frac{3\sqrt{12}}{4} = \frac{3\sqrt{4 \cdot 3}}{4} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

**3)** $\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ovo je bio najprostiji tip zadataka. Gde racionalisanjem prebacujemo koren iz imenioca u brojilac.

U sledecoj grupi zadataka ćemo koristiti da je $\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$, $a > 0$

**4)** $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}=$ da bi ‘’uništili ‘’ koren u imeniocu moramo napraviti $\sqrt[3]{2^3}$ , a pošto imamo $\frac{6}{\sqrt[3]{2^1}}$ treba racionalisati sa $\sqrt[3]{2^2}$ . Dakle:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{2}}=\frac{6}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{4}}{2}=3\sqrt[3]{4}$$

**5)** $\frac{10}{\sqrt[4]{3}}=\frac{10}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{10\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{10\sqrt[4]{27}}{3}=$

**6)** $\frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b}}=\frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b^1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^1b^2}}{\sqrt[3]{a^1b^2}}=\frac{ab\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^3b^3}}=\frac{ab\sqrt[3]{ab^2}}{ab}=\sqrt[3]{ab^2}$

Kad u imeniocu imamo zbir ili razliku dva kvadratna korena, upotrebljavamo razliku kvadrata: $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$

**7)** $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$

**8)** $\frac{11}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{11}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{11(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{11(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}=\frac{11(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

**9)**

$$\frac{5}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}=\frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{4\cdot 3-9\cdot 2}=\frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{12-18}=\frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{-6}$$

U zadacima u kojima se u imeniocu javlja zbir ili razlika ‘’trećih’’ korena moramo koristiti:

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)\rightarrow$ Razlika kubova

$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)\rightarrow$ Zbir kubova

**10)**

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}^3+\sqrt[3]{2}^3}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3+2}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{5}$$

---

**11)**

$$\frac{5}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{5}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2}}=\frac{5(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16})}{\sqrt[3]{5}^3-\sqrt[3]{4}^3}=5(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16})$$

**12)** $\frac{3}{\sqrt[4]{5}-2}=$ ovde ćemo uraditi dupli racionalizaciju da bi "uništili" četvrti koren.

$$\frac{3}{\sqrt[4]{5}-2}=\frac{3}{\sqrt[4]{5}-2}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}+2}{\sqrt[4]{5}+2}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)}{\sqrt[4]{5^2}-2^2}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)}{\sqrt{5}-4}\cdot\frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{5}+4}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+4\right)}{\sqrt{5^2}-4^2}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+4\right)}{-11}$$

Vratimo se na zadatke sa korenima:

**3)** Izračunati:

**a)** $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{-1}}}\cdot\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{x}}$

**b)** $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^3$

Rešenje:

**a)**

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{-1}}}\cdot\sqrt[5]{x^{-1}\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{\sqrt{x^{-1}}}\cdot\sqrt[5]{x^{-1}}\sqrt[5]{\sqrt{x^{-1}}}=x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[6]{x^{-1}}\cdot x^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{x^{-1}}=x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{6}}\cdot x^{-\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{10}}=$$

$$=x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}=x^{\frac{20-5-6+3}{30}}=x^{\frac{12}{30}}=x^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{x^2}$$

**b)**

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^3=\sqrt{x}\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}:\sqrt{x^{-3}}=$$

$$x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{6}}\cdot x^{\frac{2}{3}}:x^{-\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)}=x^{\frac{3+2+4+9}{6}}=x^{\frac{18}{6}}=x^3$$

__**ZAPAMTI:**__ $\boxed{\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}}$

**4)** Izračunaj:

**a)** $5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$

**b)** $\sqrt{3}+3\sqrt{27}-2\sqrt{48}$

Ovde je ideja da upotrebom pravila za korenovanje $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, svaki sabirak svedemo na čist koren.

**a)**

$5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}=$

$5\sqrt{2}+3\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{49\cdot 2}=$

$5\sqrt{2}+3\cdot 2\sqrt{2}-5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=$

$\cancel{5\sqrt{2}}+6\sqrt{2}\cancel{-5\sqrt{2}}-7\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

**b)**

$\sqrt{3}+3\sqrt{27}-2\sqrt{48}=$

$\sqrt{3}+3\sqrt{9\cdot 3}-2\sqrt{16\cdot 3}=$

$\sqrt{3}+3\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 4\sqrt{3}=\sqrt{3}+9\sqrt{3}-8\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

**5)** Izračunaj: $3\cdot\sqrt[12]{4}-4\cdot\sqrt[15]{27}+8\cdot\sqrt[24]{16}+5\cdot\sqrt[20]{81}$

Rešenje:

$3\cdot\sqrt[12]{4}-4\cdot\sqrt[15]{27}+8\cdot\sqrt[24]{16}+5\cdot\sqrt[20]{81}=$

$3\cdot\sqrt[12]{2^2}-4\cdot\sqrt[15]{3^3}+8\cdot\sqrt[24]{2^4}+5\cdot\sqrt[20]{3^4}=$

$3\cdot\underline{\sqrt[6]{2}}-4\underline{\sqrt[5]{3}}+8\cdot\underline{\sqrt[6]{2}}+5\underline{\sqrt[5]{3}}=$

$=11\sqrt[6]{2}+\sqrt[5]{3}$

## LAGRANŽOV INDENTITET:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Gde je $a>0,\quad b>0,\quad b<a^2$

Primenimo ga na 2 primera: **a)** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

**b)** $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

**a)** $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{1}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

**b)** $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ = pazi, prvo moramo 4 da ubacimo pod koren!!!

$$\sqrt{6-\sqrt{16\cdot 2}}=\sqrt{6-\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2-32}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{6^2-32}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-32}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{36-32}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+2}{2}}+\sqrt{\frac{6-2}{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$$

**7) D**okazati da je vrednost izraza $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ iracionalan broj.

Najpre ćemo upotrebom Lagranžovog indetiteta ‘’ srediti’’ $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ i $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ =(prethodni zadatak) $=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, slično je i $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, Dakle:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{2+\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\frac{2-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}=$$ Pazi na znak!!!

$$=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{3+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-\sqrt{18}+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}-3\sqrt{6}-\sqrt{18}}{3^2-\sqrt{3}^2}$$

$$=\frac{12\sqrt{2}-2\sqrt{18}}{9-3}=\frac{12\sqrt{2}-2\sqrt{9\cdot 2}}{6}=\frac{12\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{6}=\frac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$$

**8)** Dokazati da je: $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$.

Poći ćemo od leve strane da dobijemo desnu.

$$4+2\sqrt{3}=3+1+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$10+6\sqrt{3}=$ razmislimo da li ovo nije $10+6\sqrt{3}=(A+B)^3$ ?

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+1\right)^3&=\sqrt{3}^3+3\cdot\sqrt{3}^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2+1^3\\&=\sqrt{27}+3\cdot 3\cdot 1+3\sqrt{3}+1\\&=\sqrt{9\cdot 3}+9+3\sqrt{3}+1=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+10=10+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

<u>Dakle:</u>

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$$

Ovim je dokaz završen!!!

**9)** Racionalisati: $\dfrac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}+2}$

$$\frac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}+2}=\frac{6}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{7}+2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{6}{\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+1\right)+2\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{6}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-2}=$$

$$=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}{\left(\sqrt{3}^2-1^2\right)\left(\sqrt{7}^2-2^2\right)}=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}{2\cdot 3}=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{7}-2\right)$$

**10)** Racionalisati: $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{1}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

Ovde smo imali $A^2+AB+B^2$, pa smo dodali A-B, da bi dobili $A^3-B^3$.

www.matematiranje.com