

Kompleksni brojevi (C)

Kompleksni brojevi su izrazi oblika: $z = a + bi$ gde su a i b realni brojevi a $i \rightarrow$ simbol koji ima vrednost $i = \sqrt{-1}$.

Za kompleksan broj $z = a + bi$, a je njegov **realni deo** i obeležava se $\text{Re}(z) = a$, b je njegov **imaginarni deo** i obeležava se $\text{Im}(z) = b$, a $i = \sqrt{-1}$ je **imaginarna jedinica**.

Primeri:

$$z_1 = 5 + 4i \rightarrow \text{Re}(z_1) = 5, \text{Im}(z_1) = 4$$

$$z_2 = 5 - 2i \rightarrow \text{Re}(z_2) = 5, \text{Im}(z_2) = -2$$

$$z_3 = -\frac{3}{4} - 7i \rightarrow \text{Re}(z_3) = -\frac{3}{4}, \text{Im}(z_3) = -7$$

$$z_4 = 8i \rightarrow \text{Re}(z_4) = 0, \text{Im}(z_4) = 8$$

$$z_5 = 2 \rightarrow \text{Re}(z_5) = 2, \text{Im}(z_5) = 0$$

Dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ su jednaka ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$, tj imaju iste realne i imaginarne delove.

Pošto smo rekli da je $i = \sqrt{-1}$, zanimljivo je videti kako se ponašaju stepeni broja i .

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\ i^7 &= i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \\ i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

itd.

Šta zaključujemo? i stepenovano bilo kojim brojem može imati samo jednu od ove 4 vrednosti: $i, -1, -i$ ili 1 .

Uopšteno, tu činjenicu bi mogli zapisati:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i \quad \text{za } k \in \mathbb{N}.$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

Kako ovo primeniti u zadacima?

Primeri:

Izračunati:

$$a) i^{100}$$

$$b) i^{2006}$$

$$v) i^{25}$$

$$g) i^{102}$$

$$d) i^{23}$$

$$a) i^{100}$$

Ovde postoje 2 ideje : Ili da koristimo da je $i^4 = 1$ i naravno pravila za stepen :

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \text{ i } a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Dakle: $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$ ili druga ideja da je $i^{4k} = 1$

$$i^{100} = (i^4)^{25} = 1^{25} = 1$$

Odlučite sami šta vam je lakše!

$$b) i^{2006} = ?$$

$$i^{2006} = (i^2)^{1003} = (-1)^{1003} = -1$$

$$v) i^{25} = i^{24} \cdot i^1 = (i^2)^{12} \cdot i = (-1)^{12} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

↓

Kad je stepen neparan, napišemo ga kao za 1 manji paran broj pa plus 1, to jest $25 = 24 + 1$.

$$g) i^{102} = (i^2)^{51} = (-1)^{51} = -1$$

$$d) i^{23} = i^{22} \cdot i^1 = (i^2)^{11} \cdot i = (-1)^{11} \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

Pazi: $(-1)^{\text{paran broj}} = 1$

$(-1)^{\text{neparan broj}} = -1$

Kako se sabiraju, oduzimaju I množe kompleksni brojevi?

- 1) Zbir dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ je kompleksan broj $(a + c) + i(b + d)$, a njihova razlika je $(a - c) + i(b - d)$. To znači da se sabiraju I oduzimaju "normalno", kao u R.

Primer: $z_1 = 5 + 3i$
 $z_2 = 4 - 10i$

$$z_1 + z_2 = 5 + 3i + 4 - 10i = 5 + 4 + 3i - 10i = 9 - 7i$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 3i - (4 - 10i) = 5 + 3i - 4 + 10i = 1 + 13i$$

- 2) Proizvod dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ je kompleksan broj

$(ac - bd) + i(ad + bc) \rightarrow$ množi se "svaki sa svakim" I vodimo računa da je $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bd i^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= ac - bd + i(ad + bc) \end{aligned}$$

Primer: $z_1 = -3 + 5i$
 $z_2 = 4 - 2i$

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 5i) \cdot (4 - 2i) = -12 + 6i + 20i - 10i^2 = [\text{sad zameni da je } i^2 = -1, \text{ pa } -10i^2 = -10 \cdot (-1) = 10] = -12 + 6i + 20i + 10 = -2 + 26i$$

Deljenje kompleksnih brojeva

Recimo najpre da svaki kompleksan broj ima svoj konjugovan broj.

Za $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ je konjugovan broj.

Primeri: za $z = 10 + 12i$ je $\bar{z} = 10 - 12i$

za $z = 4 - 3i$ je $\bar{z} = 4 + 3i$

za $z = -4 + 5i$ je $\bar{z} = -4 - 5i$

Dva kompleksna broja se dele tako što izvršimo racionalisanje sa konjugovanim brojem delioca.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \text{gore množimo "svaki sa svakim" a dole je razlika kvadrata.}$$

$$= \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 - (di)^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Primer 1)

$$= \frac{5 + 2i}{4 - 3i} = \frac{5 + 2i}{4 - 3i} \cdot \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{(5 + 2i)(4 + 3i)}{4^2 - (3i)^2} =$$

$$= \frac{20+15i+8i+6i^2}{16-3^2 \cdot i^2} = (i^2 = -1)$$

$$= \frac{20+15i+8i-6}{16+9} = \frac{14+23i}{25} = \frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$$

Savet: Uvek na kraju rastavi $\frac{a+bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$ da bi mogao da pročitaš $\text{Re}(z)$ i $\text{Im}(z)$

Primer 2)

$$\frac{3+7i}{-5+3i} = \frac{3+7i}{-5+3i} \cdot \frac{-5-3i}{-5-3i}$$

$$= \frac{(3+7i)(-5-3i)}{(-5)^2 - (3i)^2}$$

$$= \frac{-15-9i-35i-21i^2}{25-3^2 \cdot i^2}$$

$$= \frac{-15-9i-35i+21}{25+9}$$

$$= \frac{6-44i}{34} = \frac{6}{34} - \frac{44}{34}i = \frac{3}{17} - \frac{22}{17}i$$

Modul kompleksnog broja $z = a + bi$ je nenegativan broj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Primeri: Za $z = 3 + 4i$ je $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Za $z = -9 - 12i$ je $|z| = \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2} = \sqrt{81+144} = 15$

Navešćemo neke od osobina vezanih za kompleksne brojeve koje će nam dosta pomoći u rešavanju zadataka:

- 1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (komutativnost)
- 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asocijativnost)
- 3) $z + 0 = 0 + z = z$ (0 je netral za +)
- 4) $z + z' = z' + z = 0$ (z' je suprotni broj)

- 5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- 6) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
- 7) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (1 je neutral za \square)
- 8) $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ (z^{-1} je inverzni za \square)
- 9) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (distributivnost)
- 10) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- 11) $|z^2| = |z|^2$
- 12) $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Primer : Nadjni realni i imaginarni deo kompleksnog broja: $z = \frac{(1-i)^{12}}{(1+i)^5}$

Odredimo najpre $(1-i)^{12} = ?$

Podjimo od $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Kako je $(1-i)^{12} = ((1-i)^2)^6 = (-2i)^6 = 2^6 \cdot i^6 = 2^6 \cdot (-1) = -2^6 = -64$

Nadjimo dalje $(1+i)^5 = ?$

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$(1+i)^5 = (1+i)^4 \cdot (1+i) = ((1+i)^2)^2 \cdot (1+i) = (2i)^2 (1+i)$

$= 4 \cdot i^2 (1+i) = -4(1+i)$

$$z = \frac{(1-i)^{12}}{(1+i)^5} = \frac{-64}{-4(1+i)} = \frac{16}{1+i} = \frac{16}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} =$$

$$= \frac{16(1-i)}{1^2 - i^2} = \frac{16(1-i)}{1+1} = \frac{16(1-i)}{2} = 8(1-i) =$$

$$= 8 - 8i$$

Dakle : $\text{Re}(z) = 8$ $\text{Im}(z) = -8$

Primer : Nadji x i y iz

$$x-1+(y+3)i=(1+i)(5+3i)$$

$$x-1+(y+3)i=5+3i+5i+3i^2$$

$$x-1+(y+3)i=5+8i-3$$

$$\underbrace{x-1}_{\text{Re}}+\underbrace{(y+3)i}_{\text{Im}}=\underbrace{2}_{\text{Re}}+\underbrace{8i}_{\text{Im}}$$

Dakle :

$$\begin{aligned}x-1=2 &\Rightarrow x=2+1 \Rightarrow x=3 \\ y+3=8 &\Rightarrow y=8-3 \Rightarrow y=5\end{aligned}$$

Primer: Ako je $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ dokazati da je $w^2 + w + 1 = 0$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + 1 &= \\ \frac{1-2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{4} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 &= \\ \frac{1-2i\sqrt{3}+i^2 \cdot 3}{4} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 &= \\ \frac{1-2i\sqrt{3}-3+2(-1+i\sqrt{3})+4}{4} &= \\ \frac{\cancel{1}-2i\sqrt{3}-3-\cancel{2}+2i\sqrt{3}+4}{4} &= \frac{0}{4} = 0\end{aligned}$$

Primer: Odredi sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sistem jednačina:

$$\begin{aligned}|z-2i| &= |z| \\ |z-i| &= |z-1|\end{aligned}$$

Rešenje: Neka je $z = a + bi$

$$z - 2i = a + bi - 2i = a + i(b - 2) \Rightarrow |z - 2i| = \sqrt{a^2 + (b - 2)^2}$$

$$z - i = a + bi - i = a + i(b - 1) \Rightarrow |z - i| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$$

$$z - 1 = a + bi - 1 = a - 1 + bi \Rightarrow |z - 1| = \sqrt{(a - 1)^2 + b^2}$$

Dakle:

$$\sqrt{a^2 + (b - 2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{(a - 1)^2 + b^2}$$

Kvadrirajmo obe jednačine!

$$a^2 + (b - 2)^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + (b - 1)^2 = (a - 1)^2 + b^2$$

$$b^2 - 4b + 4 = b^2$$

$$-4b = -4 \quad \text{zamenimo u drugu jednačinu}$$

$$b = 1$$

$$a^2 + (b - 1)^2 = (a - 1)^2 + b^2$$

$$a^2 + (1 - 1)^2 = (a - 1)^2 + 1^2$$

$$a^2 + 0 = a^2 - 2a + 1 + 1$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

Traženi kompleksni broj je $z = 1 + i$

Primer: Nadjite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju:

$$z^2 + \left| \frac{-}{z} \right| = 0$$

Rešenje: Neka je $z = a + bi$ traženi kompleksni broj. Onda je $\bar{z} = a - bi$, $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$(a + bi)^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ Kako je $i^2 = -1 \Rightarrow$ Ovde očigledno Re i Im moraju biti nula.

$$\underbrace{a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}_{\text{Re}} + \underbrace{2abi}_{\text{Im}} = 0$$

$$a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$2ab = 0$$

Iz $2ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

1) Ako je $a = 0$, zamenimo u prvu jednačinu:

$$0^2 - b^2 + \sqrt{0^2 + b^2} = 0 \quad (b^2 \geq 0)$$

$$\sqrt{b^2} = b^2$$

Ovde je očigledno $b = 0$ ili $b = -1$

2) Ako je $b = 0$, zamenimo u prvu jednačinu:

$$a^2 - 0^2 + \sqrt{a^2 + 0^2} = 0$$

$$a^2 + \sqrt{a^2} = 0 \quad \text{nema rešenja sem } a = 0$$

$$\sqrt{a^2} = -a^2$$

Dakle: $z = 0$; $z = i$ i $z = -i$ su traženi brojevi.

Primer: Za koje vrednosti prirodnog broja n važi jednakost:

$$(1+i)^n = (1-i)^n ?$$

Rešenje:

$$(1+i)^n = (1-i)^n$$

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n = 1$$

Transformišemo izraz:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1^2+i^2} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{(1+i)^2}{2}$$
$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$$

Dakle:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

Vratimo se u $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$, dobijemo $i^n = 1$

A ovo je (vec smo videli) moguće za $n=4k$, $k \in \mathbb{N}$.