

## IZVODI ZADACI (I deo)

**Najpre da se podsetimo tablice i osnovnih pravila:**

1.  $C' = 0$

2.  $x' = 1$

3.  $(x^2)' = 2x$

4.  $(x^n)' = nx^{n-1}$

---

5.  $(a^x)' = a^x \ln a$

6.  $(e^x)' = e^x$

7.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  (ovde je  $x > 0$  i  $a > 0$ )

8.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ )

9.  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$  ( $x \neq 0$ )

10.  $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ )

---

11.  $(\sin x)' = \cos x$

12.  $(\cos x)' = -\sin x$

13.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$   $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

14.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$   $x \neq k\pi$

---

15.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   $|x| < 1$

16.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

18.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

1.  $[cf(x)]' = cf'(x)$  Kad je konstanta vezana za funkciju, nju prepisemo a tražimo izvod samo od funkcije. A kad je konstanta sama, izvod od nje je 0.
2.  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$  Od svakog sabirka tražimo izvod posebno.
3.  $(u \text{ ov})' = u'v + v'u$  **izvod proizvoda**
4.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$  **izvod količnika**

### Zadaci:

#### 1. Nađi izvode sledećih funkcija:

- a)  $y = x^5$
- b)  $y = 10^x$
- c)  $f(x) = \sqrt{x}$
- d)  $y = \log_3 x$
- e)  $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$
- f)  $f(x) = \frac{1}{x^7}$
- g)  $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$
- h)  $y = x\sqrt{x}$
- i)  $y = \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

### Rešenje:

- a)  $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$  kao 4-ti tablični
- b)  $y = 10^x \Rightarrow y' = 10^x \ln 10$  kao 5-ti tablični
- c)  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  kao 10-ti tablični
- d)  $y = \log_3 x$  pa je  $y' = \frac{1}{x \ln 3}$  kao 7-mi tablični
- e)  $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$  Pazi: Ovde funkciju moramo prvo "pripremiti" za izvod. Iskoristićemo pravilo vezano za stepenovanje:  $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ . Dakle  $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$  pa dalje radimo kao  $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$$

- f)  $f(x) = \frac{1}{x^7}$  I ovde moramo "pripremiti" funkciju. Kako je  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$  to je  $\frac{1}{x^7} = x^{-7}$  pa je izvod  
 $f'(x) = -7 x^{-7-1} = -7x^{-8}$

g)  $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$  ovde je  $y = x^{-\frac{5}{8}}$  pa će izvod biti  $y' = -\frac{5}{8}x^{-\frac{5}{8}-1} = -\frac{5}{8}x^{-\frac{13}{8}}$

h)  $y = x\sqrt{x} = x^1x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$  pa je  $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

i)  $y = \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{11}{6}}$  pa će izvod biti  $y' = \frac{11}{6}x^{\frac{11}{6}-1} = \frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}}$

**2. Nađi izvode sledećih funkcija:**

a)  $y = 5 \sin x$

b)  $y = \frac{1}{2} \ln x$

c)  $y = \frac{-\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} x$

d)  $y = \pi x^3$

e)  $f(x) = \frac{4}{5} \operatorname{arctg} x$

f)  $f(x) = -a \operatorname{ctg} x$

g)  $y = 10$

h)  $y = -2abx$

**Rešenje:**

a)  $y = 5 \sin x$  5 je konstanta, pa nju prepisemo i tražimo izvod od  $\sin x$ , a to je  $\cos x$ . Dakle:

$y' = 5 \cos x$

b)  $y = \frac{1}{2} \ln x$   $\frac{1}{2}$  je konstanta.....  $y' = \frac{1}{2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$

c)  $y = \frac{-\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} x$  konstanta ostaje a od  $\operatorname{tg} x$  je izvod 13. tablični, pa je  $y' = \frac{-\sqrt{3}}{4} \frac{1}{\cos^2 x}$

d)  $y = \pi x^3$  Pazi :  $\pi$  je takodje konstanta, a od  $x^3$  izvod je  $3x^2$ , pa je dakle:

$y' = \pi 3x^2$

e)  $f(x) = \frac{4}{5} \operatorname{arctg} x$   $f'(x) = \frac{4}{5} \frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{5(1+x^2)}$  kao 17. tablični

$$f) \quad f(x) = -a \operatorname{ctgx} \quad f'(x) = -a \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \frac{a}{\sin^2 x}$$

$$g) \quad y = 10 \quad \text{Pazi: kad je konstanta sama izvod od nje je 0. Dakle } y' = 0$$

$$h) \quad y = -2abx \quad \text{Ovde je } -2ab \text{ konstanta, akako je od } x \text{ izvod 1 to je: } y' = -2ab$$

### 3. Nađi izvode:

$$a) \quad y = 5x^6 - 3x^5 + 4x - 8$$

$$b) \quad f(x) = 3\sin x - \frac{1}{2}e^x + 7\operatorname{arctgx} - 5$$

$$c) \quad y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4$$

#### Rešenje:

a)  $y = 5x^6 - 3x^5 + 4x - 8$  Iskoristićemo pravilo  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$  i od svakog člana tražiti izvod posebno, naravno prepisujući konstantu ispred funkcije.

$$y' = 5(x^6)' - 3(x^5)' + 4(x)' - 8'$$

$$y' = 30x^5 - 15x^4 + 4 - 0 \quad \text{Pazi još jednom, kad je konstanta sama izvod je 0.}$$

$$y' = 30x^5 - 15x^4 + 4$$

$$b) \quad f(x) = 3\sin x - \frac{1}{2}e^x + 7\operatorname{arctgx} - 5$$

$$f'(x) = 3(\sin x)' - \frac{1}{2}(e^x)' + 7(\operatorname{arctgx})' - 5'$$

$$f'(x) = 3 \cos x - \frac{1}{2}e^x + 7 \frac{1}{1+x^2} - 0 = 3 \cos x - \frac{1}{2}e^x + \frac{7}{1+x^2}$$

c)  $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4$  Najpre ćemo koristeći već pomenuta pravila za stepenovanje i korenovanje, "pripremiti" funkciju, a zatim tražiti izvode u tablici...

$$y = x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-3} + 4$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + 3(-2)x^{-3} - \frac{1}{5}(-3)x^{-4} + 0 = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} - 6x^{-3} + \frac{3}{5}x^{-4}$$

#### 4. Nađi izvode sledećih funkcija:

a)  $f(x) = x^3 \sin x$

b)  $f(x) = e^x \arcsin x$

c)  $y = (3x^2+1)(2x^2+3)$

d)  $y = x - \sin x \cos x$

**Rešenje:** Kao što primećujete, u ovom zadatku moramo koristiti pravilo za izvod proizvoda:  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

a)  $f(x) = x^3 \sin x$  Ovde je  $x^3$  kao funkcija  $u$ , dok je  $\sin x$  kao funkcija  $v$

$$f'(x) = (x^3)' \sin x + (\sin x)' x^3$$

$$f'(x) = 3x^2 \sin x + \cos x x^3 = x^2(3\sin x + x \cos x)$$

b)  $f(x) = e^x \arcsin x$  Ovde je  $e^x$  kao funkcija  $u$ , dok je  $\arcsin x$  kao funkcija  $v$

$$f'(x) = (e^x)' \arcsin x + (\arcsin x)' e^x$$

$$f'(x) = e^x \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^x = e^x \left( \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

c)  $y = (3x^2+1)(2x^2+3)$  Naravno ovde možemo sve pomnožiti pa tražiti izvod od svakog posebno, ali malo je lakše upotrebiti izvod proizvoda.

$$y' = (3x^2+1)'(2x^2+3) + (3x^2+1)(2x^2+3)' = 6x(2x^2+3) + 4x(3x^2+1) = 2x[(6x^2+9) + (6x^2+2)] = 2x[12x^2+11]$$

d)  $y = x - \sin x \cos x$  **Od  $x$  je izvod 1 a  $\sin x \cos x$  moramo kao izvod proizvoda**

$$y' = 1 - [(\sin x)' \cos x + (\cos x)' \sin x]$$

$$y' = 1 - [\cos x \cos x - \sin x \sin x] \quad \text{Znamo da je } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$y' = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x$$

## 5. Nađi izvode sledećih funkcija:

a)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b)  $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

c)  $y = \frac{5 - e^x}{e^x + 2}$

d)  $y = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$

**Rešenje:** Ovde ćemo koristiti izvod količnika :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

a)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$  ovde je  $x^2 + 1$  funkcija  $u$ , dok je  $x^2 - 1$  funkcija  $v$

$$y' = \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1) - (x^2 - 1)'(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{savet : imenilac nek ostane ovako do kraja!}$$

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{izvuci zajednički ispred zagrade ako ima, biće lakše za rad!}$$

$$y' = \frac{2x[(x^2 - 1) - (x^2 + 1)]}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{malo prisredimo...}$$

$$y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{evo konačnog rešenja!}$$

b)  $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$  u je  $\cos x$ ; a  $v$  je  $1 - \sin x$

$$y' = \frac{(\cos x)'(1 - \sin x) - (1 - \sin x)'\cos x}{(1 - \sin x)^2} \quad \text{nadjemo izvode u brojiocu...}$$

$$y' = \frac{-\sin x(1 - \sin x) + \cos x \cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} \quad \text{kako je } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ to je}$$

$$y' = \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \quad \text{skratimo } 1 - \sin x, \text{ naravno postavimo uslov da je to različito od } 0$$

$$y' = \frac{1}{1 - \sin x} \quad \textbf{i evo konačnog rešenja!}$$

$$\text{c) } y = \frac{5 - e^x}{e^x + 2}$$

$$y' = \frac{(5 - e^x)'(e^x + 2) - (e^x + 2)'(5 - e^x)}{(e^x + 2)^2}$$

$$y' = \frac{-e^x(e^x + 2) - e^x(5 - e^x)}{(e^x + 2)^2} \quad \text{izvlačimo } e^x \text{ kao zajednički ispred zagrade}$$

$$y' = \frac{-e^x(e^x + 2 + 5 - e^x)}{(e^x + 2)^2} \quad \text{malo sredimo...}$$

$$y' = \frac{-7e^x}{(e^x + 2)^2} \quad \text{konačno rešenje}$$

$$\text{d) } y = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$$

$$y' = \frac{(\ln x + 1)' \ln x - (\ln x)' (\ln x + 1)}{\ln^2 x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} (\ln x + 1)}{\ln^2 x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$y' = \frac{-1}{x \ln^2 x} \quad \text{pa je } y' = \frac{-1}{x \ln^2 x} \quad \textbf{konačno rešenje}$$

6. Odrediti jednačinu tangente funkcije  $y = 2x^2 - 3x + 2$  u datoj tački  $A(2,y)$  koja pripada funkciji.

**Rešenje:**

Najpre ćemo naći nepoznatu koordinatu  $y$  tako što ćemo u datoj funkciji zameniti  $x = 2$

$$y = 2 \cdot 2^2 - 6 + 2 = 4, \text{ pa je data tačka ustvari } A(2,4)$$

Da vas podsetimo:

### Jednačina tangente

Jednačina tangente na krivu  $y=f(x)$  u tački  $(x_0, y_0)$  u kojoj je funkcija diferencijabilna, računa se po formuli:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 \quad \text{Nađemo izvod ...}$$

$$f'(x) = 4x - 3 \quad \text{Ovde zamenimo vrednost } x = 2$$

$$f'(2) = 8 - 3 = 5 \quad \text{Vrednost prvog izvoda u dvojci je 5. Sad upotrebimo formulu:}$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - 4 = 5(x - 2) \quad \text{malo prisredimo...}$$

$$y = 5x - 6 \quad \text{je tražena jednačina tangente}$$

7. U kojoj tački parabole  $y = x^2 - 7x + 3$  je tangenta paralelna sa pravom  $y = 5x + 2$  ?

**Rešenje:**

$$f(x) = x^2 - 7x + 3 \quad \text{pa je prvi izvod}$$

$$f'(x) = 2x - 7$$

Uslov paralelnosti je da je  $k_1 = k_2$ , iz prave  $y = 5x + 2$  je  $k = 5$  pa zaključujemo da je  $f'(x) = 5$ , to jest

$$2x - 7 = 5$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Sada ovu vrednost zamenimo u jednačinu parabole da nađemo koordinatu  $y$ . Dakle :

$$y = x^2 - 7x + 3$$

$$y = 36 - 42 + 3$$

$$y = -3$$

Tražena tačka koja pripada paraboli je  $(6, -3)$



8. Odrediti jednačinu normale funkcije  $y = x^4 - x^2 + 3$  u tački  $M(1,y)$  koja pripada grafiku te funkcije.

**Rešenje:**

Najpre nadjemo nepoznatu koordinatu  $y$ .

$Y = 1 - 1 + 3 = 3$ , dakle koordinate su  $M(1,3)$

Normala se traži po formuli :

### **Jednačina normale**

Normala na krivu  $y=f(x)$  u tački  $(x_0, y_0)$  je prava normalna na tangentu krive u toj tački. Njena jednačina je :

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} (x - x_0)$$

$$y = x^4 - x^2 + 3$$

$$y' = 4x^3 - 2x \quad \text{pa zamenimo } x \text{ koordinatu tačke } M$$

$$y'(1) = 4 - 2 = 2 \quad \text{i sad upotrebimo formulu:}$$

$$y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 1) \quad \text{malo sredimo...}$$

$$2y - 6 = -x + 1 \quad \text{pa je normala} \quad \mathbf{n: x + 2y - 7 = 0} \quad \text{traženo rešenje}$$

