# IRACIONALNE JEDNAČINE

Pod iracionalnom jednačinom podrazumevaju se jednačine kod kojih se nepoznata nalazi pod korenom.
U opštem slučaju ove jednačine se ne mogu rešiti. Mi ćemo proučiti neke prostije slučajeve.

**Važno:** Jednačina $\sqrt{a(x)} = b(x)$ je ekvivalentna sistemu $a(x) = b^2(x) \wedge b(x) \geq 0$

Primer 1: Rešiti jednačinu:

$$\sqrt{x+7} = x+1$$
$$x+7 = (x+1)^2 \quad \wedge \quad x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad x+7 \geq 0 \text{ ovo zbog korena}$$
$$x+7 = x^2+2x+1 \quad \wedge \quad x \geq -1 \quad \wedge \quad x \geq -7$$
$$x^2+2x+1-x-7=0$$
$$x^2+x-6=0$$

$$a=1 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$b=1 \qquad x_1 = 2$$
$$c=-6 \qquad x_2 = -3$$

Moramo proveriti da li su rešenja ‘’dobra’’ tj. da li zadovoljavaju $x \geq -1$ i $x \geq -7$
$x_1 = 2$ je dobro
$x_2 = -3$ nije jer $x_2 = -3 \geq -1$ nije tačno. Dakle, jedino rešenje je x=2

Primer 2: Rešiti jednačinu: $1+\sqrt{x^2-9} = x$

$1+\sqrt{x^2-9} = x$ Ovde najpre ostavimo koren na jednu stranu, a sve bez korena prebacimo na drugu stranu

$\sqrt{x^2-9} = x-1$

Sada postavljamo ekvivalenciju:

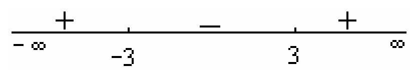
$$x^2-9=(x-1)^2 \qquad \wedge \qquad x-1\geq 0 \qquad \wedge \qquad x^2-9\geq 0$$

$$x^2-9=x^2-2x+1 \qquad\qquad x\geq 1 \qquad\qquad x_1=3$$

$$2x=1+9 \qquad\qquad\qquad\qquad x_2=-3$$

$$2x=10$$

$$x=5$$




$$x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$$

Obavezno proverimo dal rešenje zadovoljava uslove: $x\geq 1$ i $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$
Pošto zadovoljava → x=5 je rešenje

<u>Primer 3:</u> Rešiti jednačinu: $\sqrt{12-x\sqrt{x^2-8}}=3$

$$\sqrt{12-x\sqrt{x^2-8}}=3/()^2 \rightarrow \underbrace{12-x\sqrt{x^2-8}\geq 0}_{1.uslov}\wedge \underbrace{x^2-8\geq 0}_{2.uslov}$$

$$12-x\sqrt{x^2-8}=9$$

$$-x\sqrt{x^2-8}=9-12$$

$$-x\sqrt{x^2-8}=-3\rightarrow\sqrt{x^2-8}=\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{3}{x}\geq 0\Rightarrow \underbrace{x>0}_{3.uslov}$$

$$x-\sqrt{x^2-8}=3/()^2$$

$$x^2(x^2-8)=9$$

$$x^4-8x^2-9=0\rightarrow \text{ ovo je bikvadratna jednačina}$$

$$x^4-8x^2-9=0\rightarrow \text{ smena } x^2=t$$

$$t^2-8t-9=0$$

$$t_{1,2}=\frac{8\pm 10}{2}$$

$$t_1=9$$

$$t_2=-1$$

$$x^2=9\vee x^2=-1$$

$$x_{3,4}=\pm i$$

$$x_1=3, x_2=-3$$

Kad je ovako zamršena situacija sa uslovima, kao sada, a dobili smo rešenja $x_1=3$ i $x_2=-3$, **<u>zamenite</u>** rešenja u početnu jednačinu, da vidite da li su ‘’dobra’’!

$$\sqrt{12-x\sqrt{x^2-8}}=3$$
$$\sqrt{12-3\sqrt{3^2-8}}=3$$
$$\sqrt{12-3\cdot 1}=3$$
$$\sqrt{9}=3$$
$$3=3$$

Dakle x=3 jeste rešenje

$$x-3\Rightarrow \quad \sqrt{12-x\sqrt{x^2-8}}=3$$
$$\sqrt{12-3\sqrt{9-8}}=3$$
$$\sqrt{12+3}=3$$
$$\sqrt{15}=3$$

Natačno, dakle x=-3 nije rešenje

Dakle x=3 je jedino rešenja!!!

**Drugi tip zadataka koji ćemo proučiti je oblika:** $\sqrt{a(x)}\pm\sqrt{b(x)}=c(x)$

**<u>Važno:</u>**

Ovde moramo najpre odrediti zajedničku oblast definisanosti funkcija $\sqrt{a(x)}$ i $\sqrt{b(x)}$ odnosno $a(x)\geq 0$ i $b(x)\geq 0$, a kad dodjemo do oblika $\sqrt{P(x)}=Q(x)$ primenjujemo kao malopre ekvivalenciju da $P(x)=Q(x)^2 \wedge Q(x)\geq 0$. Opet vam savetujemo da ako se ne snalazite sa uslovima, dobijena rešenja ‘’proverite’’ u početnu jednačinu.

<u>Primer koliko su važni uslovi:</u>

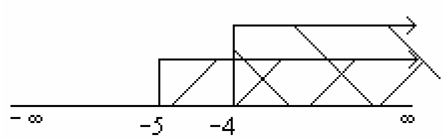
Reši jednačinu:

$$\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$$

Ovde mora biti $x\geq 0$ i $-x\geq 0$, odnosno $x\geq 0$ i $x\leq 0$ jedino može biti x=0, a to očigledno nije rešenje!!!

<u>Primer 1:</u> Reši jednačinu: $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$

Pre nego počnemo sa rešavanjem:




$2x+8\geq 0$ i $x+5\geq 0$

$x\geq -4$ i $x\geq -5$

$x\in\lfloor -4,\infty)$

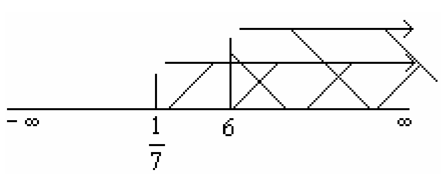
$$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7\,/()^2$$
$$\sqrt{2x+8}^{\,2}+2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}+\sqrt{x+5}^{\,2}=7^2$$
$$2x+8+2\sqrt{(2x+8)(x+5)}+x+5=49$$
$$2\sqrt{(2x+8)(x+5)}=49-2x-8-x-5$$
$$2\sqrt{(2x+8)(x+5)}=36-3x\,/()^2 \to \text{Pazi uslov} \qquad 36-3x\geq 0$$
$$4(2x+8)(x+5)=(36-3x)^2 \qquad -3\geq -36$$
$$4(2x^2+10x+8x+40)=1296-216x+9x^2 \qquad x\leq 12$$
$$8x^2+40x+32x+160-1296+216x-9x^2=0$$
$$-x^2+288x-1136=0$$
$$x^2-288x+1136=0$$
$$x_{1,2}=\frac{288\pm 280}{2}$$
$$x_1=284$$
$$x_2=4$$

Da se podsetimo uslova: $x\in[-4,\infty)$ i $x\leq 12$, Dakle, jedino rešenje je x=4

<u>Primer 2:</u> Reši jednačinu $\sqrt{7x-1}-\sqrt{3x-18}=5$ uslovi su:

$7x-1x\geq 0$ i $3x-18\geq 0$

$x\geq \frac{1}{7}$ i $x\geq 6$




$x\in[6,\infty)\to Uslov$

$$\sqrt{7x-1}-\sqrt{3x-18}=5$$

Lakše nam je da jedan koren prebacimo pa onda da kvadriramo!!!

$$\sqrt{7x-1}=5+\sqrt{3x-18}\,/()^2$$
$$7x-1=25+10\sqrt{3x-18}+3x-8$$
$$7x-1-25-3x+18=10\sqrt{3x-18}$$
$$4x-8=10\sqrt{3x-18}\,/:2$$

$$2x-4=5\sqrt{3x-18}\ /()^2 \rightarrow \text{ uslov } \begin{array}{l} 2x-4\geq 0 \\ x\geq 2 \end{array}$$
$$(2x-4)^2=25(3x-18)$$
$$4x^2-16x+16=75x-450$$
$$4x^2-16x+16-75x+450=0$$
$$4x^2-91x+466=0$$
$$x_{1,2}=\frac{91\pm\sqrt{825}}{8}$$
$$x_{1,2}=\frac{91\pm 5\sqrt{33}}{8}$$
$$x_1=\frac{91+5\sqrt{33}}{8}$$
$$x_2=\frac{91-5\sqrt{33}}{8}$$

Kad se ovako desi moramo naći približne vrednosti za $x_1$ i $x_2$ da bi videli da li zadovoljavaju uslove:

$$x_1\approx 14{,}97$$
$$x_2\approx 7{,}78$$

Pošto su uslovi $x\geq 6$ i $x\geq 2$
**Zaključujemo da su oba rešenja dobra.**

Primer 3: Reši jednačinu: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=\sqrt{x+24}$

Rešenje: Ovde moramo postaviti: 3 uslova:

$$\begin{array}{l} x+3\geq 0 \\ x\geq -3 \end{array},\quad \begin{array}{l} x+8\geq 0 \\ x\geq -8 \end{array},\quad \begin{array}{l} x+24\geq 0 \\ x\geq -24 \end{array}$$

Dakle, kad upakujemo ova 3 uslova $x\geq -3$

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=\sqrt{x+24}\ /()^2$$
$$\sqrt{x+3}^2+2\sqrt{x+3}\sqrt{x+8}+\sqrt{x+8}^2=^2\sqrt{x+24}$$
$$x+3+2\sqrt{(x+3)(x+8)}+x+8=x+24$$
$$2\sqrt{(x+3)(x+8)}=x+24-x-3-x-8$$
$$2\sqrt{(x+3)(x+8)}=13-x \rightarrow \text{ uslov: } \begin{array}{l} 13-x\geq 0 \\ -x\geq -13 \\ x\leq 13 \end{array}$$

$$4(x+3)(x+8)=(13-x)^2$$
$$4(x^2+8x+3x+24)=169-26x+x^2$$
$$4x^2+32x+12x+96-169+26x-x^2=0$$
$$3x^2+70x-73=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-70\pm\sqrt{5776}}{6}=\frac{-70\pm 76}{6}$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-24$$

Da li su rešenja dobra?
Uslovi su $x\geq -3$ i $x\leq 13$, **dakle x=1 je jedno rešenje**

Primer 4: Rešiti jednačinu: $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$

Rešenje: Ovde ćemo morati da uvedemo smenu:

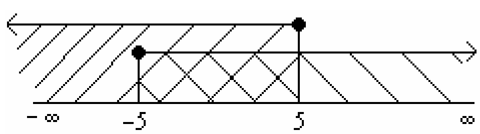
$\sqrt[3]{x}=t$

$$\sqrt{5+t}+\sqrt{5-t}=t\,/()^2$$

Uslovi: $5+t\geq 0$ i $5-t\geq 0$

$t\geq -5$ $\qquad$ $-t\geq -5$

$t\leq 5$




$$t\in[-5,5]$$

$$\sqrt{5+t}+\sqrt{5-t}=t\,/()^2$$
$$\left(\sqrt{5+t}+\sqrt{5-t}\right)^2=t^2$$
$$\sqrt{5+t}^{\,2}+\sqrt{(5+t)-(5-t)}+\sqrt{5-t}^{\,2}=t^2$$
$$5+t+2\sqrt{25-t^2}+5-t=t^2$$
$$2\sqrt{25-t^2}=t^2\,/()^2\rightarrow\text{ uslova: }t^2-10\geq 0$$

$$4(25-t^2)=(t^2-10)^2$$
$$4(25-t^2)=t^4-20t^2+100$$
$$100-4t^2=t^4-20t^2+100$$
$$t^4-16t^2=0$$
$$t^2(t^2-16)=0$$
$$t^2=0 \Rightarrow t=0$$
$$t^2-16=0 \Rightarrow t=+4, t=-4$$

za $t=4 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=4 \Rightarrow x=64$ jeste rešenje
za $t=-4 \Rightarrow \sqrt[3]{x}-4 \Rightarrow x=-64$ nije rešenje
za $t=0 \Rightarrow x=0$ nije rešenje

Dakle $x=64$ je jedino rešenje!!!