GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA
(zadaci) I deo

1) Izračunati granične vrednosti sledećih funkcija:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 2x =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{3x} =$

v) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{10}{x-5} =$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{7} =$

Rešenje:

Šta da radimo?

Gde vidimo x mi zamenimo vrednost kojoj on teži, ako je taj izraz **odredjen** , zadatak je gotov.

a) $\lim\limits_{x\to 2} 2x = 2\cdot 2 = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{3x} = \frac{1+2}{3\cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$

v) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{10}{x-5} = \frac{10}{5-5} = \frac{10}{0} = \infty$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{7} = \frac{-3+3}{7} = \frac{0}{7} = 0$

2) Odrediti granične vrednosti sledećih funkcija:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x^2-5x+6}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+12}{x^2-5}$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{3-x^2}$

ZAPAMTI: Kod ovog tipa zadataka, gde $x\to\infty$, a funkcija je racionalna: $\frac{f(x)}{Q(x)}$, i nema **korena**, **ln, sin** i ostalih funkcija koristimo sledeće zaključke:

i) Ako je najveći stepen gore u brojiocu veći od najvećeg stepena dole u imeniocu rešenje je ∞

ii) Ako je najveći stepen dole veći od najvećeg stepena gore, rešenje je 0

iii) Ako su najveći stepeni isti, rešenje je količnik brojeva ispred najvećih stepena.

Rešenja:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x^2-5x+6}=0$ (pravilo **ii**) jer u imeniocu imamo x^2 a u brojiocu samo x

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+12}{x^2-5}=\infty$ (pravilo **i**) , gore je polinom trećeg stepena a u imeniocu drugog stepena

v) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}=\frac{5}{2}$ (pravilo **iii**) , ovde su polinomi istog stepena

g) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3-x^2}=\frac{1}{-1}=-1$ (pravilo **iii**) , polinomi su istog stepena , ispred x^2 u brojiocu je 1 a u imeniocu -1

Možda vaši profesori neće dozvoliti da koristite ova pravila , e onda morate da radite sve postupno:

<u>Ideja</u> je da se svaki sabirak podeli sa najvećim stepenom *x*-sa.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}$ sve smo podelili sa x^2, jer je to najveći stepen ...sad pokratimo...

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{5\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$$ dalje koristimo da je $\frac{A}{\infty}=0$, pa je

$\frac{3}{\infty}=0$, $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{5}{\infty}=0$, $\frac{6}{\infty}=0$ i dobijamo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{5\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{0+0}{2-0-0}=\frac{0}{2}=0$$

Ovaj postupak bi onda morali da primenjujemo za sve ostale zadatke, evo recimo pod g)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{2}{x^2}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5-0+0}{2+0+0}=\frac{5}{2}$$

3) Odrediti granične vrednosti:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$;

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}$;

v) $\lim_{x\to -3}\frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$;

Ovaj tip zadatka je (ako je to moguće i ako znate izvode) najbolje raditi preko **LOPITALOVOG** pravila. Ako ne, morate i imenilac i brojilac **rastaviti na činioce**! (Pogledajte taj PDF fajl u I godini i II godini)

a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4} \Rightarrow$$ **PAZI:** ovde ćemo iskoristiti znanje iz II godine vezano za kvadratnu jednačinu:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$x^2+6x-7=0 \qquad\qquad x^2-5x+4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{2} \qquad\qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm 8}{2} \qquad\qquad x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$$

$$x_1=1 \qquad\qquad x_1=4$$

$$x_2=-7 \qquad\qquad x_2=1$$

$$x^2+6x-7=(x-1)(x+7) \qquad\qquad x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{(x-4)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+7)}{(x-4)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{x-4}=\frac{1+7}{1-4}=\frac{8}{-3}$$

Preko Lopitala bi bilo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+6x-7)`}{(x^2-5x+4)`}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+6}{2x-5}=\frac{2\cdot 1+6}{2\cdot 1-5}=\frac{8}{-3}$$

v)

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} \Rightarrow \text{ izdvajamo na stranu:}$$

$x^4-6x^2-27=0 \to$ Ovo je bikvadratna jednačina , uvodimo smenu $x^2=t$

$t^2-6t-27=0$

$t_{1,2}=\frac{6\pm 12}{2}$

$t_1=9$

$t_2=-3$

$x^4-6x^2-27=(x^2-9)(x^2+3)=(x-3)(x+3)(x^2+3)$

A izraz u imeniocu ćemo rastaviti sklapanjem "dva po dva" :

$$x^3+3x^2+x+3=x^2(x+3)+1(x+3)=(x+3)(x^2+1)$$

Vratimo se sad u zadatak:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)\cancel{(x+3)}(x^2+3)}{\cancel{(x+3)}(x^2+1)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x^2+3)}{(x^2+1)}=\frac{(-3-3)(9+3)}{(9+1)}=\frac{-6\cdot 12}{10}=-\frac{72}{10}=-\frac{36}{5}$$

Preko Lopitala:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x^4-6x^2-27)`}{(x^3+3x^2+x+3)`}=\lim_{x\to -3}\frac{4x^3-12x}{3x^2+6x+1}=\frac{4\cdot(-3)^3-12\cdot(-3)}{3\cdot(-3)^2+6\cdot(-3)+1}=$$

$$=\frac{-4\cdot 27+36}{27-18+1}=\frac{-72}{10}=-\frac{36}{5}$$

4) Odrediti sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$;

b) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$;

v) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

Rešenje:

Ovo je novi tip zadatka, s korenima. Ideja je da se izvrši racionalizacija. To jest, koristimo razliku kvadrata:

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+x)}^2-\sqrt{(1-x)}^2}{4x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{4x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{4x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{4x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$$

b)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\sqrt{x+1}^2-2^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x+1-4}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\cancel{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=\sqrt{3+1}+2=2+2=4$$

v)

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ Ovde moramo da izvršimo duplu racionalizaciju.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4}=\text{spakujemo}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\sqrt{x^2+1}-1}}{\boxed{\sqrt{x^2+16}-4}}\cdot\frac{\boxed{\sqrt{x^2+1}+1}}{\sqrt{x^2+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\boxed{\sqrt{x^2+16}+4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt{(x^2+1)^2}-1^2]\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{[\sqrt{(x^2+16)^2}-4^2]\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{(x^2+16-16)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{\sqrt{0+16}+4}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{8}{2}=4$$

5) Odredi sledeće granične vrednosti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

Rešenje:

PAZI: Kad su u pitanju treći koreni, moramo koristiti formule:

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3 \qquad \text{razlika kubova}$$

$$(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3 \qquad \text{zbir kubova}$$

a)

Ovde u imeniocu imamo izraz $\sqrt[3]{1+x^2}-1$, a to nam je ustvari *(A - B)*. Moramo dodati (A^2+AB+B^2) , to jest, pošto je $A=\sqrt[3]{1+x^2}$ a $B=1$ racionališemo sa $\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}^{\,3}-1^3}{x^2\cdot[\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2[\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1]}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}[\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+0)^2}+\sqrt[3]{1+0}+1}=\frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=$$ **PAZI:** I ovde mora dupla racionalizacija

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\text{spakujemo}=\lim_{x\to 1}\frac{\boxed{\sqrt[3]{x}-1}}{\boxed{\sqrt{x}-1}}\cdot\frac{\boxed{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\boxed{\sqrt{x}+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}^{\,3}-1^3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}^{\,2}-1^2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

www.matematiranje.com

6) Odredi sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}$

Rešenja:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})$ i ovde ćemo vršiti racionalizaciju…

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-10x}}{1}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-10x}}{x+\sqrt{x^2-10x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\sqrt{(x^2-10x)^2}}{x+\sqrt{x^2-10x}}$$

U brojiocu je očigledno razlika kvadrata . Moramo malo i imenilac da prisredimo, odnosno da pod korenom izvučemo x^2 ispred zagrade pa zatim x ispred korena…

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\sqrt{(x^2-10x)^2}}{x+\sqrt{x^2-10x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-10x)}{x+\sqrt{x^2(1-\frac{10}{x})}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+10x}{x+x\cdot\sqrt{(1-\frac{10}{x})}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{x}}\right)}$$

Izraz $\dfrac{10}{x}$ teži nuli kad $x\to\infty$, pa je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10}{\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{x}}\right)}=\frac{10}{\left(1+\sqrt{1-0}\right)}=\frac{10}{1+1}=\frac{10}{2}=5$$

Sličan način rada primenjujemo i u narednom primeru:

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(x^2+1)^2}-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x\cdot\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot[\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+1]}=\frac{1}{\infty}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}=?$

Ovde ćemo upotrebiti jedan **trik**: $\sqrt{x}-\sqrt{a}$ ćemo malo prepraviti...

$\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{a^2}$ a ovo je sada razlika kvadrata $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{a^2}=(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})$

Vraćamo se u zadatak:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a})}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})}{\cancel{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}}=\lim_{x\to a}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})=(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a})=2\cdot\sqrt[4]{a}$$