1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = xe^x$

Oblast definisanosti (domen)

Ova funkcija je svuda definisana, jer nema razlomka a funkcija e^x je definisana za svako x iz skupa R.

Dakle $x \in (-\infty, \infty)$. Ovo nam odmah govori da funkcija **nema vertikalne asimptote**!

Nule funkcije

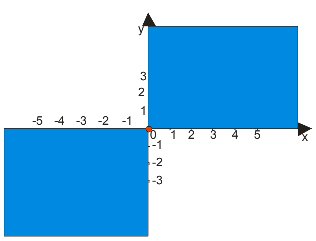
$$y = 0$$
$$xe^x = 0 \to x = 0$$

Da vas podsetimo da je e^x >0 uvek.

Znak funkcije

$$y > 0 \to xe^x > 0 \to x > 0$$
$$y < 0 \to xe^x < 0 \to x < 0$$

Na skici bi to izgledalo:



Funkcija se nalazi samo u plavim oblastima a x- osu seče samo u x = 0.

Parnost i neparnost

$$f(-x) = -xe^{-x} = \frac{-x}{e^x} \neq f(x)$$

Ovo nam govori da funkcija nije ni parna ni neparna, odnosno da nije simetrična ni u odnosu na y osu ni u odnosu na koordinatni početak.

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$y = xe^x$ pazi , mora kao izvod proizvoda

$y` = x`e^x + (e^x)`x$

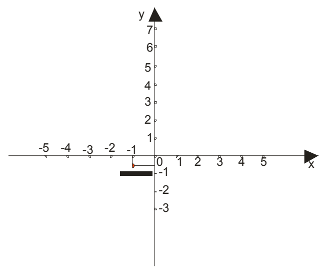
$y` = 1e^x + e^x x$

$y` = e^x(1+x)$

$y` = 0 \to e^x(1+x) \to 1+x=0 \to x=-1$

Za x = -1 je $y = (-1)e^{-1} \to y = -\dfrac{1}{e}$

Dakle , tačka ekstrema je $M(-1, -\dfrac{1}{e})$



Od čega nam zavisi znak prvog izvoda?

Kako je $e^x > 0$ uvek, to znak prvog izvoda zavisi samo od 1+ x

	$-\infty$	-1 ∞
1+x	−	+
y`	−	+
	↘	↗

Tačka M je onda tačka minimuma.

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$y` = e^x(1+x)$

$y`` = (e^x)`(1+x) + (1+x)`e^x$

$y`` = e^x(1+x) + e^x$

$y`` = e^x(x+2)$

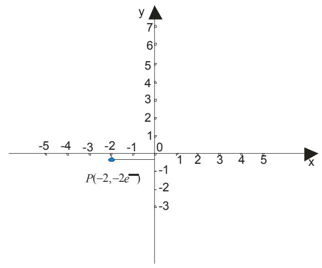
$y`` = 0$

$x+2=0 \to x=-2$

za x = -2 je $y = -2e^{-2} = \dfrac{-2}{e^2}$

Dakle, postoji prevoj i to je tačka $P(-2,-2e^{-2})$.

Nadjemo približno da je $-2e^{-2} \approx -0,27$ i na skici to bi bilo:



Od čega nam zavisi znak drugog izvoda?

$e^x > 0$ to znak drugog izvoda zavisi samo od x + 2

	-∞ -2	∞
x+2	—	+
y``	—	+

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Kao što smo već rekli , nema vertikalne asimptote!

Horizontalna asimptota

Jedan mali savet : Kod funkcija koje imaju e^x, radite posebno limese kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$, jer važi da je

$$e^{\infty} = \infty$$
$$e^{-\infty} = 0$$

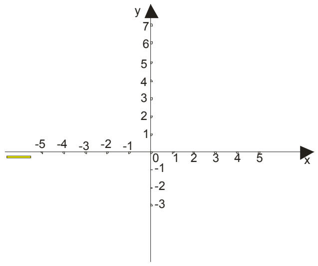
Dakle:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\infty \cdot 0 = ?$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{-(-\infty)}} = \frac{-\infty}{\infty} = lopital = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0_{-}$$

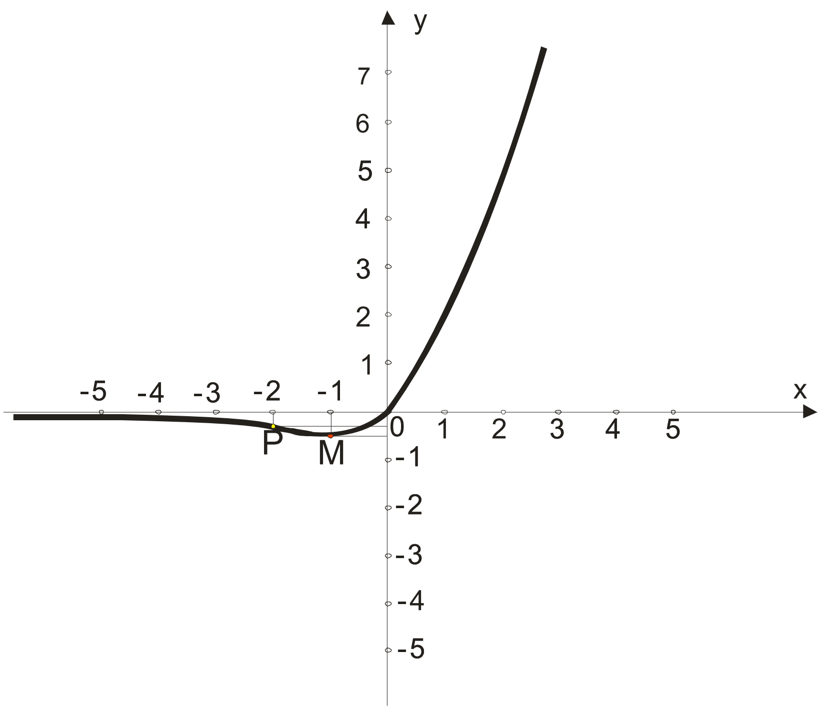
Šta nam ovo govori?

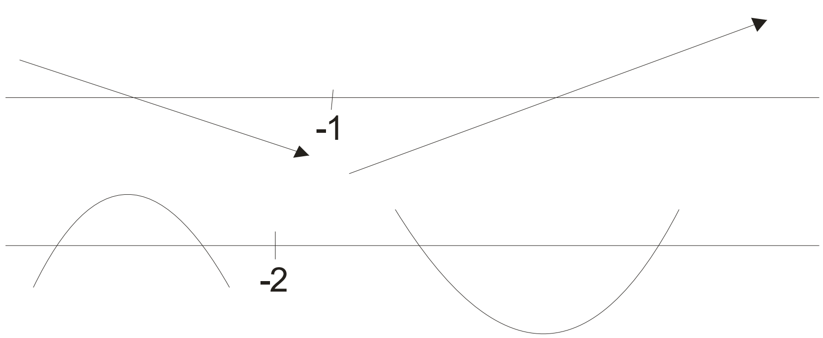
Kad $x \to +\infty$ ne postoji horizontalna asimptota , ali kad $x \to -\infty$ imamo horizontalnu asimptotu y=0, odnosno,

Kad x teži $-\infty$, funkcija se približava nuli sa donje, negativne strane! To je ovo 0_{-} u rešenju.



I još da sklopimo konačan grafik:



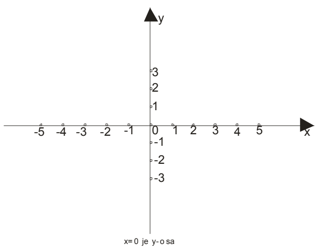


2. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{e^x}{x}$

Oblast definisanosti (domen)

$x \neq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Ovo znači da funkcija u x=0 ima potencijalnu vertikalnu asimptotu.



Nule funkcije

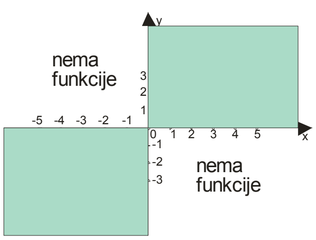
Kako smo već rekli $e^x > 0$, pa funkcija nema nula, odnosno nigde ne seče x osu.

Znak funkcije

Jasno je da znak funkcije zavisi samo od x.

$y > 0 \rightarrow x > 0$

$y < 0 \rightarrow x < 0$

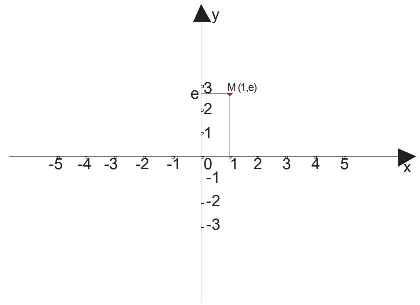


Parnost i neparnost

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{1}{xe^x}$$

dakle, funkcija nije ni parna ni neparna.

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)



$$y=\frac{e^x}{x}$$

$$y`=\frac{(e^x)`x-x`e^x}{x^2}$$

$$y`=\frac{e^x x-1e^x}{x^2}$$

$$y`=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$y`=0\rightarrow e^x(x-1)=0\rightarrow x-1=0\rightarrow x=1$$

<u>*Za* x=1</u> je $y=\dfrac{e^1}{1}\rightarrow y=e$

$M(1,e)$ je tačka ekstremne vrednosti

Dalje razmišljamo od čega nam zavisi znak prvog izvoda?

Kako je $x^2>0$ i $e^x>0$ zaključujemo da znak prvog izvoda zavisi samo od x-1.

	-∞ 1	∞
x-1	−	+
y\`	−	+
	$\searrow$	$\nearrow$

Tačka M je onda tačka minimuma!

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y`=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$y``=\frac{[e^x(x-1)]`\cdot x^2-(x^2)`\cdot e^x(x-1)}{x^4}$$ pazi $e^x(x-1)$ mora kao izvod proizvoda

$$y``=\frac{[(e^x)`(x-1)+(x-1)`e^x]\cdot x^2-2x\cdot e^x(x-1)}{x^4}$$

$$y``=\frac{[e^x(x-1)+1e^x]\cdot x^2-2x\cdot e^x(x-1)}{x^4}$$

$$y``=\frac{[e^x x-1e^x+1e^x]\cdot x^2-2x\cdot e^x(x-1)}{x^4}\quad\frac{e^x x\cdot x^2-2x\cdot e^x(x-1)}{x^4}=\frac{e^x\cancel{x}\cdot(x^2-2(x-1))}{x^{\cancel{4}}}$$

$$y``=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

$y``=0 \to x^2-2x+2=0$

Ova kvadratna jednačina nema rešenja, jer je kod nje D<0 i $a>0$.

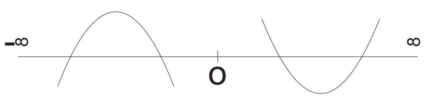
Možemo zaključiti da je zato $x^2-2x+2>0$

(pogledaj fajl kvadratna funkcija iz druge godine)

Dakle, funkcija nema prevojnih tačaka!

Od čega nam zavisi znak drugog izvoda?

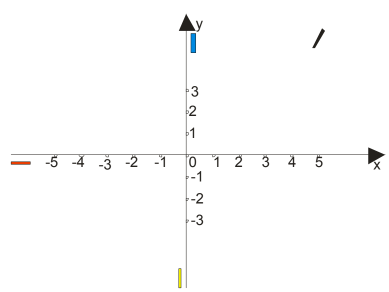
Pa samo od x^3, odnosno samo od x.



Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Vertikalna asimptota

$$\lim_{x\to 0+\varepsilon}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0+\varepsilon}=\frac{1}{+\varepsilon}=+\infty \qquad \text{(plava crta)}$$
$$\lim_{x\to 0-\varepsilon}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0-\varepsilon}=\frac{1}{-\varepsilon}=-\infty \qquad \text{(žuta crta)}$$



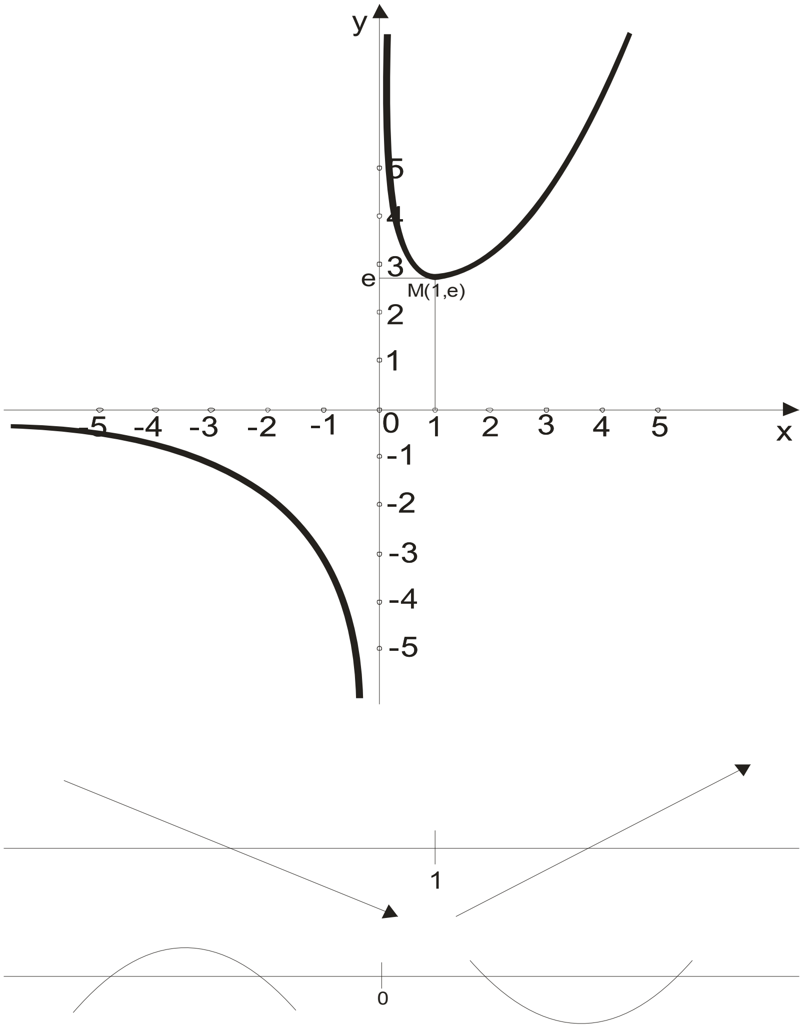
Horizontalna asimptota

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=lopital=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)`}{x`}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=e^\infty=\infty \qquad \text{(crna crtka)}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=\frac{0}{-\infty}=0\_ \qquad \text{(crvena crtka)}$$

Dakle, funkcija ima horizontalnu asimptotu y = 0 ali samo sa leve strane.

Onda nema kose asimptote! **www.matematiranje.com**

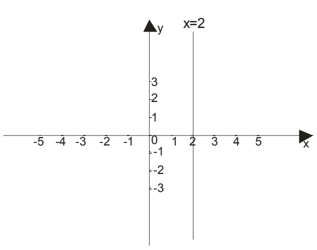
Konačan grafik izgleda:



3. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Oblast definisanosti (domen)

$x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$



Nule funkcije

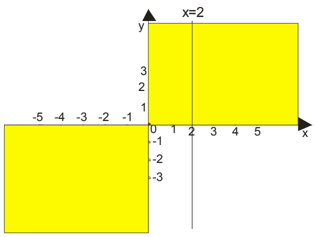
$$y = 0 \rightarrow x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{jer} \quad e^{\frac{1}{x-2}} > 0 \quad \text{uvek}$$

Znak funkcije

Kako je $e^{\frac{1}{x-2}} > 0$ **,** zaključujemo da znak funkcije zavisi samo od x

y > 0 kad x > 0 , pa je tu x > 0

y < 0 kad x < 0 , pa je tu x < 0



Funkcija se nalazi samo u žutim oblastima.

Parnost i neparnost

$$f(-x) = -x \cdot e^{\frac{1}{-x-2}} \neq f(x)$$

funkcija nije ni parna ni neparna.

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$ moramo kao izvod proizvoda i pazimo da je $e^{\frac{1}{x-2}}$ složena funkcija $(e^{\Theta})` = e^{\Theta} \cdot \Theta`$

$$y` = 1 \cdot e^{\frac{1}{x-2}} + (e^{\frac{1}{x-2}})` \cdot x$$

$$y` = e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (\frac{1}{x-2})` \cdot x$$

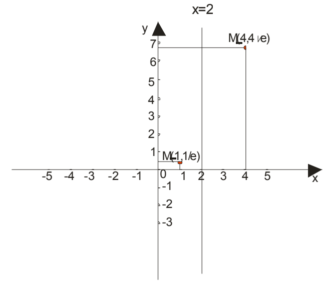
$$y` = e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (-\frac{1}{(x-2)^2}) \cdot x = e^{\frac{1}{x-2}} - e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot x = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (1 - \frac{x}{(x-2)^2}) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{(x-2)^2 - x}{(x-2)^2}$$

$$y` = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4 - x}{(x-2)^2}$$

$$y` = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$$

Izjednačimo prvi izvod sa nulom da nadjemo ekstremne vrednosti.

$$y`=0 \to x^2-5x+4=0 \to x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to x_1=1; x_2=4$$



<u>Za x=1</u>

$$y=1\cdot e^{\frac{1}{1-2}}=e^{-1}=\frac{1}{e}\to M_1=(1,\frac{1}{e})$$

<u>Za x=4</u>

$$y=4\cdot e^{\frac{1}{4-2}}=4e^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{e}\to M_2=(4,4\sqrt{e})$$

Od čega nam zavisi znak prvog izvoda?

Kako je $e^{\frac{1}{x-2}}>0$ **i** $(x-2)^2>0$**,** znak zavisi samo od x^2-5x+4

	-∞ 1	1 4	4 ∞
x-1	−	+	+
x-4	−	−	+
y`	+ ↗	− ↘	+ ↗

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y`=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}$$

$$y``=(e^{\frac{1}{x-2}})`\cdot\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}+(\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2})`e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$y``=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot(-\frac{1}{(x-2)^2})\cdot\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}+\frac{(x^2-5x+4)`(x-2)^2-((x-2)^2)`(x^2-5x+4)}{(x-2)^4}\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

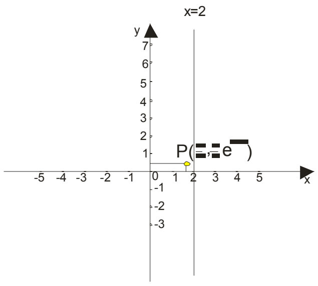
Posle sredjivanja dobijamo:

$$y``=\frac{5x-8}{(x-2)^4}\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$y`` = 0 \rightarrow 5x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$Za\ x = \frac{8}{5} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{\frac{1}{\frac{8}{5}-2}} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{\frac{1}{-\frac{2}{5}}} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{-\frac{5}{2}}$$

Tačka prevoja je dakle : $P(\frac{8}{5}, \frac{8}{5} \cdot e^{-\frac{5}{2}})$



Od čega nam zavisi znak drugog izvoda ?

Samo od izraza 5x-8

	$-\infty$	$\frac{8}{5}$ ∞
5x-8	−	+
y``	−	+

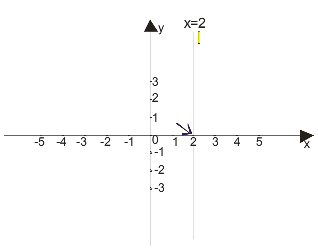
Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

<u>Vertikalna asimptota</u>

$$y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x\to 2+\varepsilon} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2+\varepsilon-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{+\varepsilon}} = 2 \cdot e^{\infty} = \infty$$ (žuta crta)

$$\lim_{x\to 2-\varepsilon} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2-\varepsilon-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{-\varepsilon}} = 2 \cdot e^{-\infty} = 2 \cdot 0 = 0$$ (plava strelica)



Horizontalna asimptota

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = \infty\cdot e^{\frac{1}{\infty-2}} = \infty\cdot e^{\frac{1}{\infty}} = \infty\cdot e^{0} = \infty\cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = -\infty\cdot e^{\frac{1}{-\infty-2}} = -\infty\cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty\cdot e^{0} = -\infty\cdot 1 = -\infty$$

Nema horizontalne asimptote, pa moramo ispitati da li postoji kosa asimptota!

Kosa asimptota

y= kx+n

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x-2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{\infty-2}} = e^{0} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty}[xe^{\frac{1}{x-2}} - 1\cdot x] = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{\frac{1}{x-2}} - 1) = \infty\cdot 0 = ?$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}-1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = lopital = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-2)^2} = 1\cdot 1 = 1$$

Dobili smo kosu asimptotu :

y= kx + n   pa je y = x + 1

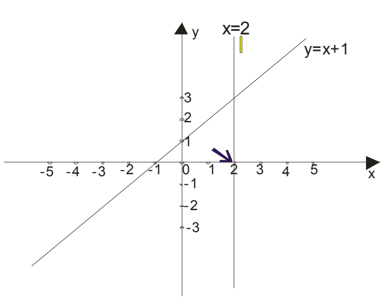
Davidimo kako ona izgleda:

Za x=0

$y = 0 + 1 = 1$

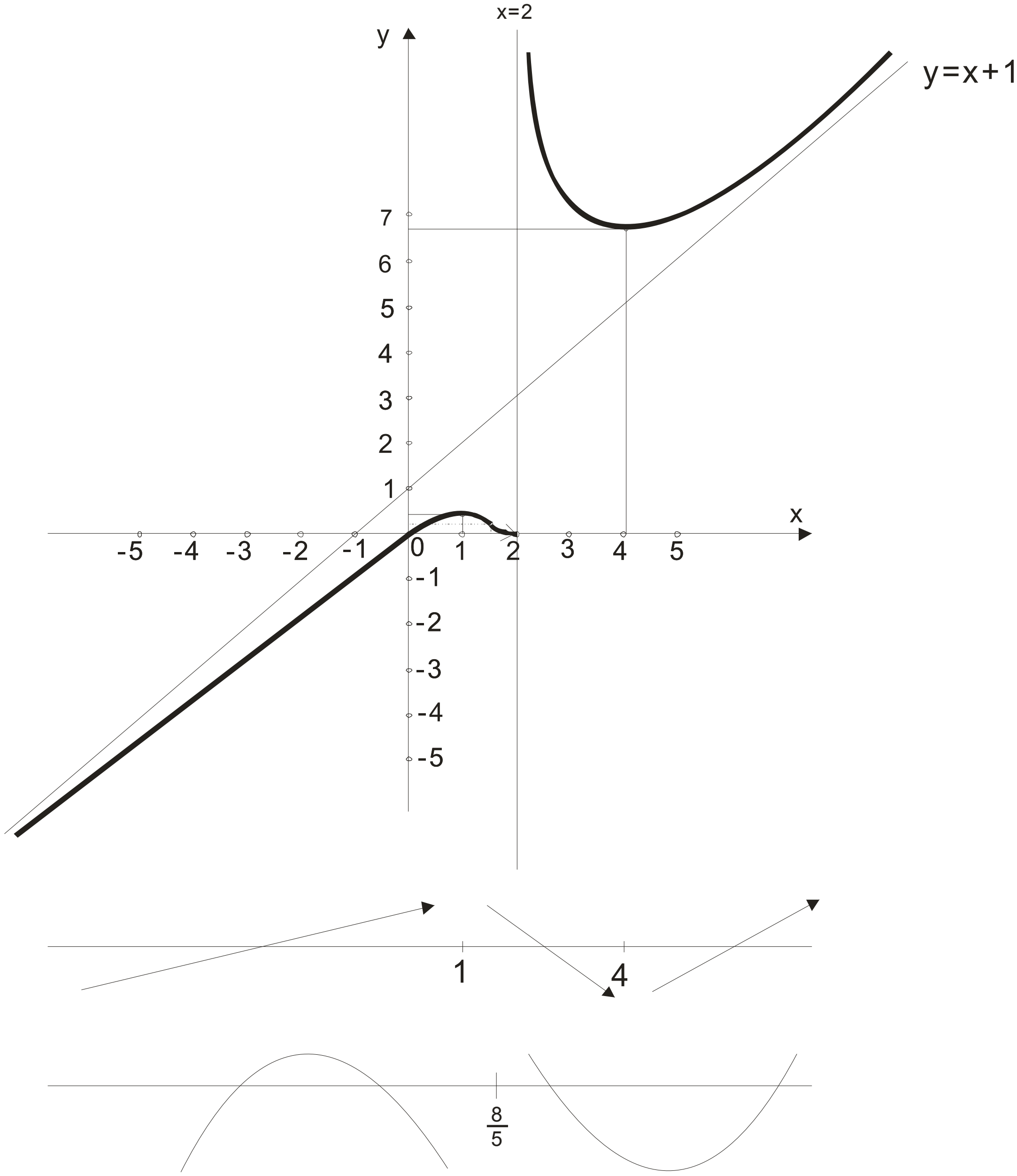
Za y=0

$0 = x + 1 \to x = -1$



x	0	-1
y	1	0

I da sklopimo konačan grafik:


x=2
y
y=x+1
7
6
5
4
3
2
1
x
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
1
4
8/5