

# 1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$

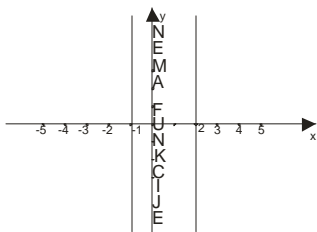
## Oblast definisanosti (domen)

Sve iza ln mora da je veće od 0.

$$\frac{x-2}{x+1} > 0 \quad \text{Koristimo tablicu...}$$

	$-\infty$	-1	2	$\infty$
$x-2$	-	-	+	
$x+1$	-	+	+	
$\frac{x-2}{x+1}$	+	-	+	

Domen funkcije je  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ . Ovo nam govori da funkcija ne postoji između -1 i 2, na skici je to



## Nule funkcije

Da vas podsetimo :  $\ln \Theta = 0 \leftrightarrow \Theta = 1$

$$y = 0$$

$$\frac{x-2}{x+1} = 1$$

$$x-2 = x+1$$

$$-2 = 1$$

Dakle nema nule, a to nam govori da funkcija ne seče x osu.

## Znak funkcije

Opet malo podsećanje :

$$\ln \Theta > 0 \leftrightarrow \Theta > 1$$

$$\ln \Theta < 0 \leftrightarrow 0 < \Theta < 1$$

Dakle:

$$y > 0$$

$$\frac{x-2}{x+1} > 1$$

$$\frac{x-2}{x+1} - 1 > 0$$

$$\frac{x-2-1(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\frac{x-2-x-1}{x+1} > 0$$

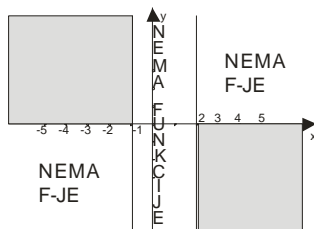
$$\frac{-3}{x+1} > 0 \text{ pomnožimo sa -1}$$

$$\frac{3}{x+1} < 0$$

$$x+1 < 0$$

$$\boxed{x < -1}$$

Ako je  $y > 0$  za  $x < -1$  (grafik iznad x ose) onda je jasno da je  $y < 0$  za  $x > 2$  (grafik ispod x ose)



### ***Parnost i neparnost***

Funkcija nije ni parna ni neparna. To nam je jasno i iz oblasti definisanosti... Ako baš mora, onda je

$$f(-x) = \ln \frac{-x-2}{-x+1} \neq f(x)$$

### ***Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)***

Pazi, radi se o izvodu složene funkcije...

$$y = \ln \frac{x-2}{x+1}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{(x-2)'(x+1) - (x+1)'(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{1(x+1) - 1(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+2}{(x-2)(x+1)}$$

$$y' = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

$y' = 0$  za  $3=0$ , pa zaključujemo da nema ekstremnih vrednosti.

Dalje razmišljamo od čega zavisi znak prvog izvoda? Od  $(x-2)(x+1)$ .

	$-\infty$	$-1$	$2$	$\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
$y'$	$+$	$-$ nema f-je	$+$	

Ova tablica je ista kao i ona za oblast definisanosti. To nam govori da je funkcija **stalno** monotono **rastuća**.

### Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y = \ln \frac{x-2}{x+1}$$

$$y' = \frac{3}{(x-2)(x+1)} \quad \text{pazi } \left(\frac{1}{\otimes}\right)' = -\frac{1}{\otimes^2} \cdot \otimes'$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2} [(x-2)(x+1)]'$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2} [1(x+1) + 1(x-2)]$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2} (2x-1)$$

$$y'' = \frac{3(1-2x)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

$y'' = 0$  za  $1-2x = 0$  pa je  $x = \frac{1}{2}$ , ali **PAZI**, ova tačka **NE PRIPADA** oblasti definisanosti, pa funkcija nema prevoj.

$$y'' > 0 \rightarrow 1-2x > 0 \rightarrow x < \frac{1}{2} \rightarrow x < -1$$

$$y'' < 0 \rightarrow 1-2x < 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow x > 2$$



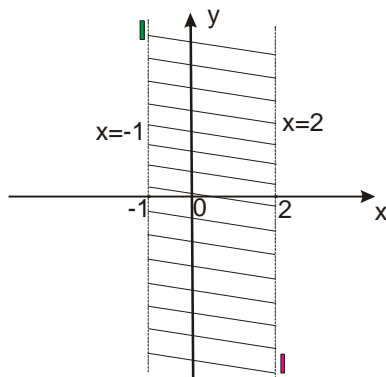
## Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

### vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 2+\varepsilon} \ln \frac{x-2}{x+1} =$  [Kako je  $\ln$  neprekidna funkcija, ona može da zameni mesto sa  $\lim$  ]=

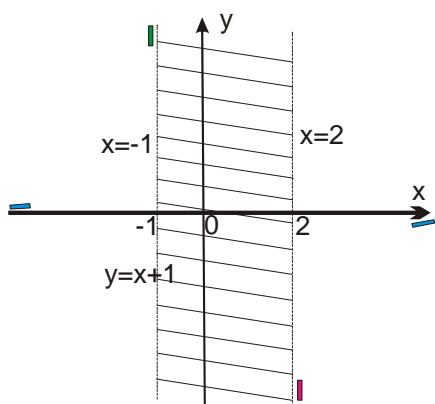
$$\ln \frac{2+\varepsilon-2}{2+1} = \ln 0 = -\infty \text{ (crvena crta)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-\varepsilon} \ln \frac{x-2}{x+1} = \ln \frac{-1-2}{-1-\varepsilon+1} = \ln \frac{-3}{-\varepsilon} = \ln \infty = \infty \text{ (zeleni crta)}$$



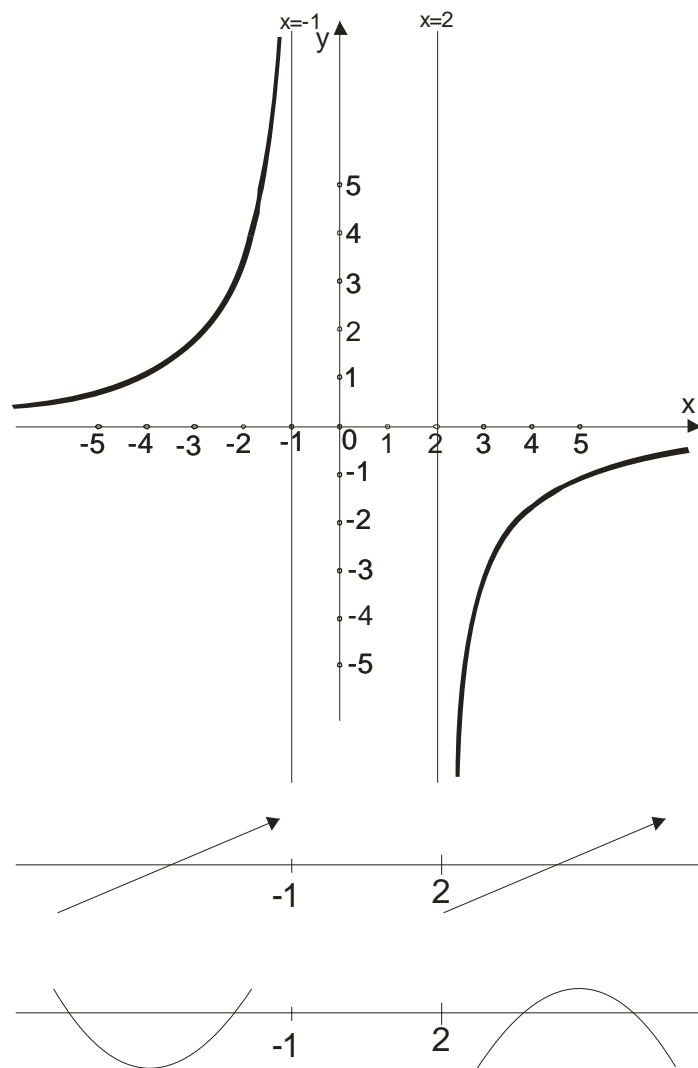
### horizontalna asimptota:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x-2}{x+1} = \ln \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x+1} = \ln 1 = 0$  Dakle  $y = 0$  (x-osa) je horizontalna asimptota. (plave crtke)



Kako smo našli da horizontalna asimptota postoji, zaključujemo da nema kose asimptote.

Još da sklopimo konačan grafik...



2. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije  $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

**Oblast definisanosti (domen)**

Sve iza  $\ln$  mora da je veće od 0, pa je odatle  $x > 0$ .

Kako imamo i razlomak, sve u imeniocu mora da je različito od 0.

$$1 - \ln x \neq 0$$

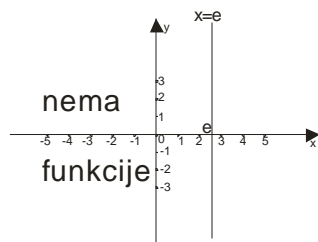
$$\ln x \neq 1$$

$$x \neq e$$

Oblast definisanosti je :

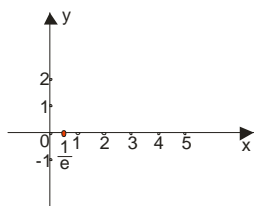
$$x \in (0, e) \cup (e, \infty)$$

Na skici, to bi izgledalo ovako:



### ***Nule funkcije***

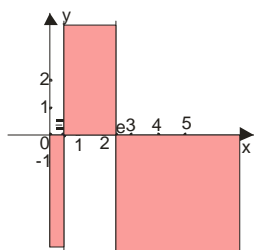
$$y = 0 \rightarrow 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



### ***Znak funkcije***

	0	$\frac{1}{e} = e^{-1}$	e	$\infty$
$1 + \ln x$	-	+	+	
$1 - \ln x$	+	+	-	
<b>y</b>	-	+	-	

Na skici to bi izgledalo ovako:



Funkcija se nalazi samo u obeleženim oblastima.

### ***Parnost i neparnost***

Funkcija nije ni parna ni neparna. Zašto?

Pa nema smisla ni tražiti  $f(-x)$  jer funkcija nije ni definisana za  $x < 0$

## Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost ( rašćenje i opadanje)

$$y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

$$y' = \frac{(1 + \ln x)'(1 - \ln x) - (1 - \ln x)'(1 + \ln x)}{(1 - \ln x)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) - (-\frac{1}{x})(1 + \ln x)}{(1 - \ln x)^2} \quad \text{izvučemo u brojiocu } \frac{1}{x} \text{ kao zajednički...}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}[(1 - \ln x) + (1 + \ln x)]}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1 - \cancel{\ln x} + 1 + \cancel{\ln x}}{x \cdot (1 - \ln x)^2} = \frac{2}{x \cdot (1 - \ln x)^2}$$

Kako je  $2 \neq 0$  funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Razmišljamo dalje:  $x > 0$  uvek ( iz oblasti definisanosti) i  $(1 - \ln x)^2 > 0$  tako da je uvek  $y' > 0$ , pa je funkcija stalno

**rastuća.**

### Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

$$y' = \frac{2}{x \cdot (1 - \ln x)^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^4} \cdot [x \cdot (1 - \ln x)^2]'$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^4} \cdot [x' \cdot (1 - \ln x)^2 + ((1 - \ln x)^2)' \cdot x]$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^4} \cdot [1 \cdot (1 - \ln x)^2 + 2(1 - \ln x)(-\frac{1}{x})x]$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^4} \cdot [1 \cdot (1 - \ln x)^2 + 2(1 - \ln x)(-1)] = -\frac{2}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^4} \cdot [(1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x)]$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^4} \cdot \cancel{(1 - \ln x)} [1 - \ln x - 2] = -\frac{2}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^3} \cdot [-\ln x - 1]$$

$$y'' = \frac{2(1 + \ln x)}{x^2 \cdot (1 - \ln x)^3}$$

$$y'' = 0 \rightarrow 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$y = \frac{1 + \ln e^{-1}}{1 - \ln e^{-1}} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

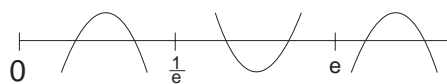
Tačka  $P(\frac{1}{e}, 0)$  je tačka prevoja.

Od čega zavisi znak drugog izvoda?

Od  $1+\ln x$  i od  $1-\ln x$ . Idemo u tablicu...

	0	$\frac{1}{e}=e^{-1}$	e	$\infty$
$1+\ln x$	-	+	+	
$1-\ln x$	+	+	-	
$y''$	-	+	-	

odnosno



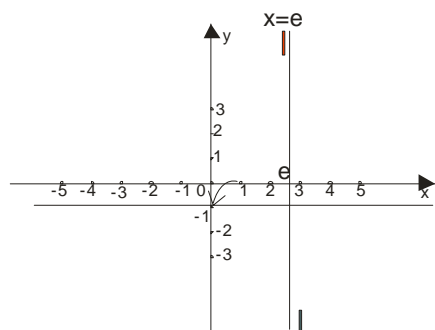
**Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)**

vertikalna asimptota

$$\lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = \frac{1+\ln(0+\varepsilon)}{1-\ln(0+\varepsilon)} = \frac{\infty}{\infty} = \text{lopital} = \lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1 \quad (\text{strelica na skici})$$

$$\lim_{x \rightarrow e+\varepsilon} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = \frac{1+\ln(e+\varepsilon)}{1-\ln(e+\varepsilon)} = \frac{2}{-\varepsilon} = -\infty \quad (\text{zelená crta})$$

$$\lim_{x \rightarrow e-\varepsilon} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = \frac{1+\ln(e-\varepsilon)}{1-\ln(e-\varepsilon)} = \frac{2}{+\varepsilon} = +\infty \quad (\text{crvena crta})$$



horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = \frac{\infty}{-\infty} = \text{lopital} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1$$

$y = -1$  je horizontalna asimptota, pa kose nema...

I da sklopimo konačan grafik



