Trigonometrijske jednačine

1) Jednačine oblika:

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$
$atg^2 x + btgx + c = 0$
$actg^2 x + bctgx + c = 0$

Rešavaju se sa smenom t

Naravno $at^2 + bt + c = 0$ ima realna rešenja za $D \geq 0.$ Kad nadjemo t_1, t_2 vratimo se u smenu I pritom vodimo računa da je kod $\sin x$ i $\cos x$ uslovi $|t_1| \leq 1$ i $|t_2| \leq 1$, dok kod tgx i $ctgx$ mogu t_1 i t_2 uzimati vrednosti iz celog skupa realnih brojeva.

Primer:

Reši jednačine:

a) $2\sin^2 + 3\sin x + 1 = 0$

b) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

v) $tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$

g) $2ctgx + tgx = 3$

d) $2\sin^2 x - \cos x = 1$

Rešenja:

a) $2\sin^2 + 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow$ smena $\sin x = t$

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$
$$t_1 = -\frac{1}{2}$$
$$t_2 = -1$$

Vratimo se u smenu:

$\sin x = -\frac{1}{2}$ ili $\sin x = -1$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

b)

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0 \to smena \cos x = t$$
$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$$
$$t_1 = 3 \to nemoguce -1 \leq \cos x \leq 1$$
$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Dakle rešenja su:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

v) $tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$ smena $tgx = t$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$t_1 = 2$$
$$t_2 = 1$$

Vratimo se u smenu:

$tgx = 2$ ili $tgx = 1$

Kad se desi da sa kruga ne možemo pročitati vrednost za neku funkciju, upotrebljavamo arkus funkciju koja je inverzna trigonometrijska funkcija. $x_1 = arctg 2 + k\pi$ $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

g) 2ctgx+tgx+3 $\to$ znamo da je $tgx=\frac{1}{ctgx}$

2ctgx+$\frac{1}{ctgx}=3\to$ smena: $ctgx=t$

$$2t+\frac{1}{t}=3$$
$$2t^2-3t+1=0$$
$$t_{1,2}=\frac{3\pm1}{4}$$
$$t_1=1$$
$$t_2=\frac{1}{2}$$

Za $ctgx=1$ je $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$

Za $ctgx=\frac{1}{2}$ je $x_2=arcctg\frac{1}{2}+k\pi$

d) $2\sin^2 x-\cos x=1$

Ovde moramo sve prebaciti ili u sinx ili u cosx. Lakše je upotrebiti $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ i sve prebaciti u cosx.

$$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$$
$$2-2\cos^2 x-\cos x-1=0$$
$$-2\cos^2 x-\cos x+1=0/\cdot(-1)$$
$$2\cos^2 x+\cos x-1=0\to smena:\cos x=t$$
$$2t^2+t-1=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-1\pm3}{4}$$
$$t_1=\frac{1}{2}$$
$$t_2=-1$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ili $\cos x = -1$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x_2 - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$k \in Z$

$x_3 = \pi + 2k\pi$

$k \in Z$

2) **Homogena jednačina**

Ona je oblika : $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0$

Rešavamo je tako što sve podelimo sa $\cos^2 x$. Napomenemo da ovde mora biti $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$.
Dobijamo:

$atg^2 x + btgx + c = 0$ koju znamo da rešimo!

Na homogenu jednačinu se "svede" I jednačina oblika : $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = d$

Napišemo kao "trik" da je : $d = d\cdot 1 = d\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$, sve prebacimo na levu stranu I imamo:

$(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0$

Ovu jednačinu rešavamo kao homogenu.

Primer:

Reši jednačine:

a) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

b) $5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$

Rešenja:

a)

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0 / : \cos^2 x \neq 0$$
$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{sonx\cos x}{\cos^2 x} + 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$2tg^2 x - 5tgx + 3 = 0 \to smena(tgx = t)$$
$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$
$$t_1 = \frac{3}{2}$$
$$t_2 = 1$$

Vrtaimo se u smenu:

Za $tgx = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = arctg\frac{3}{2} + k\pi, k \in Z$

Za $tgx = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

b)

$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$$
$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

Sve prebacimo na levu stranu !

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 / : \cos^2 x$$
$$3tg^2 x + 2tgx - 1 = 0 \to smena(tgx = t)$$
$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$
$$t_1 = \frac{1}{3}$$
$$t_2 = -1$$

Za $tgx = \frac{1}{3} \Rightarrow x = arctg\frac{1}{3} + k\pi, k \in Z$

Za $tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

3)Jednačine oblika :

$$\begin{aligned}&\sin ax \pm \sin bx = 0\\&\cos ax \pm \cos bx = 0\end{aligned} \quad \text{I slične}$$

U njima najpre iskoristimo formule trigonometrijskih funkcija u proizvod.

Nakon toga: $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$

Primer: Reši jednačine:

a) $\sin 6x - \sin 4x = 0$

b) $\cos 3x + \cos x = 0$

v) $\sin x = \cos 2x$

g) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

Rešenja:

$$\sin 6x - \sin 4x = 0$$
$$2\cos\frac{6x+4x}{2}\sin\frac{6x-4x}{2} = 0$$
$$2\cos 5x \cdot \sin x = 0$$
$$\cos 5x = 0 \vee \sin x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad 5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \qquad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

$$\sin x = 0$$
$$x = 0 + 2k\pi \qquad x = \pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$$
$$k \in Z$$

$$x = k\pi$$
$$k \in Z$$

b)

$$\cos 3x + \cos x = 0$$
$$2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 0$$
$$2\cos 2x \cos x = 0$$

$\cos 2x = 0$ ili $\cos x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad$ $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ k \in Z \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} x\frac{\pi}{2} + k\pi \\ k \in Z \end{array}$$

Ako vam nije jasno ne morate raditi ovo "zajedničko" rešenje!

v)

$$\sin x = \cos 2x$$
$$\sin x - \cos 2x = 0$$
$$\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$$
$$2\cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \sin\frac{x - (\frac{\pi}{2} - 2x)}{2} = 0$$
$$2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$$

odavde je:

$\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ ili $\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$

Za $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ je:

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ili $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad$ $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $\quad$ $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$

Zajedno : $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

Za $\sin(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4})=0$ je:

$\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=0+2k\pi$ ili $\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi$

$3x-\frac{\pi}{2}=4k\pi$

$3x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}$

$3x-\frac{\pi}{2}=2\pi+4k\pi$

$3x=2\pi+4k\pi$

$3x=2\pi+\frac{\pi}{2}+4k\pi$

$x=\frac{5\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}$

Zajedno: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$

g)

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$$
$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}+\sin 2x=0$$
$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$$
$$\sin 2x(2\cos x+1)=0 \rightarrow odavde:$$

$\sin 2x=0$ ili $2\cos x+1=0$

$2x=0+2k\pi$

$x=k\pi$

$2x=\pi+2k\pi$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $\quad$ $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

4) **Jednačina oblika:** $a\sin x+b\cos x=c$

Ova jednačina može da se rešava na više načina:

i) smenom $tg\frac{x}{2}=t$

ii) metodom uvodjenja pomoćnog argumenta

iii) metoda pravljenja sistema

i) **smenom** $tg\frac{x}{2}=t$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\rightarrow$ već izvedeno ranije!

Posle sredjivanja dobije se kvadratna jednačina po t.

Ovde se može javiti problem pri traženju nula dobijenog polinoma. Ovo će nam biti opcija kad nemamo drugih. Naravno , pošto je smena $tg\frac{x}{2}=t$ mora biti $x\neq\pi+2k\pi$

ii) **Metoda uvodjenja pomoćnog argumenta**

$a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$

Uvedemo novi argument φ pomoću :

$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\varphi=arctg\frac{b}{a},tj,tg\varphi=\frac{b}{a}$

I početnu jednačinu svedemo na:

$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Naravno, mora biti : $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ to jest $a^2+b^2\geq c^2$.

Ako je $a^2+b^2<c^2$ jednačina nema rešenja.

iii) **Metoda pravljenja sistema**

jednačini $a\sin x+b\cos x=c$ dodamo $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Iz prve jednačine izrazimo sinx ili cosx I zamenimo u drugu. Dobijamo kvadratnu jednačinu po jednoj nepoznatoj $(\sin x\vee\cos x)$.

<u>Primer:</u>

Reši jednačinu :

a) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$

b) $2\sin x+5\cos x=4$

Rešenje:

a) Probajmo metodu pomoćnog argumenta:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\Rightarrow a=1,b=\sqrt{3},c=2$$

$a^2+b^2=1^2+\sqrt{3}^2=1+3=4$ uslov: $a^2+b^2\geq c^2$, $4\geq 4$ ispunjen uslov!

$c^2=4$

$$\varphi=arctg\frac{b}{a}$$

$$\varphi=arctg\frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$tg\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60^o=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}}=\frac{2}{2}=1$$

Zamenimo u:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{3})=1$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$k\in Z$$

Dakle ova metoda je “dobra”. Uvek probajte prvo nju!

b)

$$2\sin x + 5\cos x = 4$$
$$a = 2, b = 5, c = 4$$

uslov : $a^2 + b^2 \geq c^2$, $4 + 25 \geq 16$, ispunjen!!!

$$tg\varphi = \frac{b}{a}$$
$$tg\varphi = \frac{5}{2}$$

Evo problema! Ne možemo lako naći ugao!

Probajmo treću metodu, sa sistemom.

$$2\sin x + 5\cos x = 4 \Rightarrow \cos x = \frac{4 - 2\sin x}{5}$$

To zamenimo u $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^2 x + \left(\frac{4 - 2\sin x}{5}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2 x + \frac{16 - 16\sin x + 4\sin^2 x}{25} = 1$$
$$25\sin^2 x + 16 - 16\sin x + 4\sin^2 x = 25$$
$$29\sin^2 x - 16\sin x - 9 = 0 \to smena(\sin x = t)$$
$$29t^2 - 16t - 9 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{1300}}{58} = \frac{16 \pm 10\sqrt{13}}{58}$$
$$t_1 = \frac{16 + 10\sqrt{13}}{58} = \frac{2(8 + 5\sqrt{13})}{58} = \frac{8 + 5\sqrt{13}}{29} \approx 0{,}896$$
$$t_2 = \frac{16 - 10\sqrt{13}}{58} = \frac{8 - 5\sqrt{13}}{29} \approx -0{,}346$$

Dakle

$$x = \arcsin\left(\frac{8 + 5\sqrt{13}}{29}\right) + 2k\pi$$
$$x = \arcsin\left(\frac{8 - 5\sqrt{13}}{29}\right) + 2k\pi$$

5) Smena $\cos 2x = t$

Ako se u zadatoj jednačini javljaju izrazi $\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x,$ primenjujemo ovu smenu. Važe zamene:

$$\sin^2 x = \frac{1-t}{2}; \cos^2 x = \frac{1+t}{2}$$

Primer1: Reši jednačinu: $8\cos^6 x - 4\sin^4 x = \cos 2x$

Rešenje:

Uvodimo smenu $\cos 2x = t$

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = (\frac{1+t}{2})^3$$
$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (\frac{1-t}{2})^2$$
$$8\cos^6 x - 4\sin^4 x = \cos 2x$$
$$8(\frac{1+t}{2})^3 - 4(\frac{1-t}{2})^2 = t$$
$$8\frac{1+3t+3t^2+t^3}{8} - 4\cdot\frac{1-2t+t^2}{4} = t$$
$$1+3t+3t^2+t^3 - 1 + 2t - t^2 - t = 0$$
$$t^3 + 2t^2 + 4t = 0$$
$$t(t^2+2t+4) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 + 2t + 4 = 0$$
$$\cos 2x = 0$$

Rešenje je :

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

Ovo su neki od metoda za rešavanje trigonometrijskih jednačina. Treba reći da ne postoji opšti metod za svaku trigonometrisku jednačinu.

Probajte da transformišete date izraze, koristeći poznate formule,”pravite” proizvod koji će biti jednak nuli, uvodite odgovarajuće smene. Srećno!!!