SVODJENJE NA I KVADRAT

Kao što smo videli do sada, trigonometrijske funkcije uglova I kvadranta izračunavaju se na isti način kao trigonometrijske funkcije oštrih uglova pravouglog trougla. Pokazaćemo da se preko formula, trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla mogu izraziti preko trigonometrijskih funkcija odgovarajućeg ugla I kvadranta. Taj postupak se zove ***svodjenje na I kvadrat.***

1) Iz II u I kvadrant

Važe formule za: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ odnosno $\boxed{\sin\left(90^0+\alpha\right)=\cos\alpha}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ odnosno $\boxed{\cos\left(90^0+\alpha\right)=-\sin\alpha}$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$ odnosno $\boxed{tg\left(90^0+\alpha\right)=-ctg\alpha}$

$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$ odnosno $\boxed{ctg\left(90^0+\alpha\right)=-tg\alpha}$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$

$ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha$

odnosno:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha\\&\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha\\&tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha\\&ctg(180^0-\alpha)=-ctg\alpha\end{aligned}}$$

Primeri:

a) $\sin 115^o=\sin(90^o+25^o)=\cos 25^o$ a može i:

$\sin 115^o=\sin(180^o-65^o)=\sin 65^o$

Naravno, već smo videli ''veze'' u I kvadrantu i znamo da je $\cos 25^o=\sin 65^o$. Tako da možete upotrebiti bilo koju formulu iz ove dve grupe.

b) $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

v) $tg141^o=tg\left(180^o-39^o\right)=-tg39^o$

g) $ctg101^o=ctg\left(90^o+11^o\right)=-tg11^o$

2) iz III u I kvadrant

Opet imamo **dve** grupe formula:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$$
$$ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha$$

to jest:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha\\&\cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha\\&tg(180^0+\alpha)=tg\alpha\\&ctg(180^0+\alpha)=ctg\alpha\end{aligned}}$$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$ tj. $\boxed{\sin\left(270^0-\alpha\right)=-\cos\alpha}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$ tj. $\boxed{\cos\left(270^0-\alpha\right)=-\sin\alpha}$

$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$ tj. $\boxed{tg\left(270^0-\alpha\right)=ctg\alpha}$

$ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$ tj $\boxed{ctg\left(270^0-\alpha\right)=tg\alpha}$

Primeri:

a) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 207^o=\cos\left(180^o+27^o\right)=-\cos 27^o$

v) $tg263^o=tg\left(270^o-7^o\right)=ctg7^o$

g) $ctg\frac{7\pi}{6}=ctg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

3) Iz IV u I kvadrant

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ tj. $\sin\left(270^0+\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$ tj. $\cos\left(270^0+\alpha\right)=\sin\alpha$

$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$ tj. $tg\left(270^0+\alpha\right)=-ctg\alpha$

$ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$ tj. $ctg\left(270^0+\alpha\right)=-tg\alpha$

Ako posmatramo negativan ugao $(-\alpha)$**:**

sin(-α) = - sinα **cos(-α) = cosα** **tg(-α) = tgα** **ctg(-α) = -ctg α**

Ovo nam govori da je jedino $\cos\alpha$ parna funkcija (jer ‘’uništava’’ minus a sve ostale su neparne)

Primeri:

a) $\sin 307^{o} = \sin(270^{o} + 37^{o}) = -\cos 37^{o}$

b) $\cos(-30^{o}) = \cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

v) $tg\frac{11\pi}{6} = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $ctg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Što se tiče periodičnosti funkcija $\sin x$ i $\cos x$ već smo uočili da važi:

$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ odnosno $\sin(\alpha + 360^{0}\cdot k) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ odnosno $\cos(\alpha + 360^{0}\cdot k) = \cos\alpha$

za k koji je bilo koji ceo broj.

Dakle: **osnovni period finkcija** $\sin x$ **i** $\cos x$ **je** $T = 2\pi$ **odnosno** $T = 360^{o}$

Primeri:

a) $\sin 1170^{o} =$ (oduzmimo od 1170^{o} po 360^{o} dok se ne dodje ‘’ ispod’’ 360^{o})

$1170^{o} - 360^{o} = 810^{o}$

$810 - 360^{o} = 450^{o}$

$450^{o} - 360 = 90^{o}$

Pa je: $\sin 1170^{o} = \sin 90^{o} = 1$ ili možemo zapisati: $\sin 1170^{o} = \sin(90^{o} + 3\cdot 2\pi) = \sin 90^{o}$

b) $\cos 780^{o} =$ (sličan postupak)

$780^{o} - 360^{o} = 420^{o}$

$420^{o} - 360^{o} = 60^{o}$

Pa je $\cos 780^{o} = \cos 60^{o} = \frac{1}{2}$ tj. $\cos 780^{o} = \cos(60^{o} + 360^{o}) = \cos 60^{o} = \frac{1}{2}$

Za tangense i kotangense važi:

$tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$ odnosno $tg(\alpha + k \cdot 180^0) = tg\alpha$

$ctg(\alpha + k\pi) = ctg\alpha$ odnosno $ctg(\alpha + k \cdot 180^0) = ctg\alpha$

Dakle: **osnovni period funkcija** tgx **i** $ctgx$ **je** $T = \pi$ **odnosno** $T = 180^o$

Primeri:

a) $tg750^o =$(odavde od 750^o oduzmemo po 180^o dok se ne ‘’ spustimo’’ ispod 180^o)

$750^o - 180^o = 570^o$

$570^o - 180^o = 390$

$390^o - 180^o = 210^o$

$210^o - 180^o = 30^o$

$tg750^o = tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $ctg(-1110^o) = -ctg1110^o = -ctg30^o = -\sqrt{3}$ jer je $1110^o = 6 \cdot 180^o + 30^o$

ZADACI:

1) Uprostiti izraz: $\frac{\sin 750^o \cdot \cos 390^o \cdot tg1140^o}{ctg405^o \cdot \sin 1860^o \cdot \cos 780^o}$

Rešenja: Najpre ćemo upotrebom formula sve prebaciti u I kvadrant!!!

$\sin 750^o = \sin(30^o + 2 \cdot 360^o) = \sin 30^o = \frac{1}{2}$

$\cos 390^o = \cos(30^o + 360^o) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg1140^o = tg(60^o + 6 \cdot 180^o) = tg60^o = \sqrt{3}$

$ctg405^o = ctg(45^o + 2 \cdot 180^o) = ctg45^o = 1$

$\sin 1860^o = \sin(60^o + 5 \cdot 360^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 780^o = \cos(60^o + 2 \cdot 360^o) = \cos 60^o = \frac{1}{2}$

Vratimo ova rešenja u početni zadatak:

$$\frac{\sin 750^o \cdot \cos 390^o \cdot tg1140^o}{ctg405^o \cdot \sin 1860^o \cdot \cos 780^o} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

2) Uprosti izraz:

$$\frac{\cos\frac{17\pi}{6}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}\cdot tg\frac{17\pi}{4}}{ctg\frac{10\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{8\pi}{3}}$$

Slično kao u prethodnom zadatku, sve prebacujemo u I kvadrant.

$$\cos\frac{17\pi}{6}=\cos\frac{17\cdot 180^o}{6}=\cos 510^o=\cos 150^o=\cos(180^o-30^o)=-\cos 30^o=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\frac{17\pi}{4}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{16\pi}{4}\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)=tg\frac{\pi}{4}=tg 45^o=1$$

$$ctg\frac{10\pi}{3}=ctg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{9\pi}{3}\right)=ctg\left(\frac{\pi}{3}+3\pi\right)=ctg\frac{\pi}{3}=ctg 60^o=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{7\cdot 180^o}{4}=\cos 315^o=\cos(-45^o)=\cos 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{8\pi}{3}=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{2\cdot 180^o}{3}=\sin 120^o=\sin(90^o+30^o)=$$

$$=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zamenimo ove vrednosti u zadatak:

$$\frac{\cos\frac{17\pi}{6}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}\cdot tg\frac{17\pi}{4}}{ctg\frac{10\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{8\pi}{3}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3) Dokazati indetitet:

$$\frac{\sin\alpha-2\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos\alpha}=\frac{1}{2}tg\alpha$$

Kod indetiteta krenimo od jedne strane i transformišemo je, dok ne dodjemo do druge strane.

Važi:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha-2\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-2\sin\alpha}{-\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-2\cos\alpha}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}tg\alpha$$

4) Dokazati indetitet:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)tg(\pi-\alpha)}=-\sin\alpha$$

Važi:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$$

Pa je:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)tg(\pi-\alpha)}=\frac{(-\sin\alpha)\cancel{(-tg\alpha)}\ \cancel{(\cos\alpha)}}{\cancel{(\cos\alpha)}\ \cancel{(-tg\alpha)}}=-\sin\alpha$$