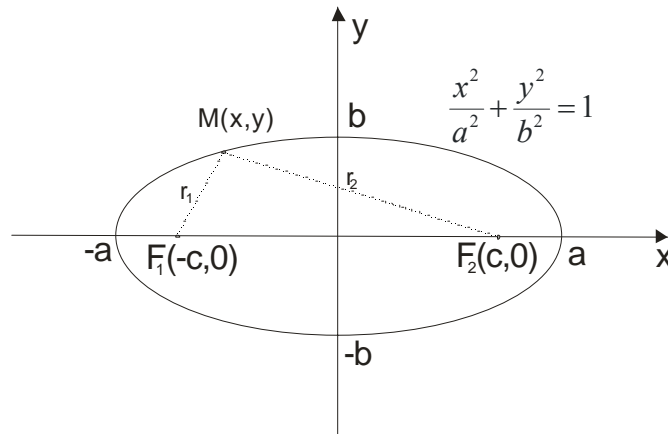


ELIPSA

Elipsa je skup tačaka u ravni s osobinom da je zbir rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka(žiža) stalan broj.



r_1, r_2 su potezi (radijus vektori) elipse i važi za bilo koju tačku na elipsi $r_1 + r_2 = 2a$ (konstantan broj)

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ su žiže elipse , gde je $c^2 = a^2 - b^2$

a - je velika poluosa , odnosno $2a$ je velika osa

b - je mala poluosa, odnosno $2b$ je mala osa

$e = \frac{c}{a}$ je ekscentricitet (još kod elipse važi da je $e < 1$)

Glavna jednačina elipse je $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ili $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Primer 1.

Odrediti jednačinu elipse , ako žiže imaju koordinate $(\pm 3, 0)$, a dužina veće ose jednaka je 12.

Najpre iz podatka o žižama zaključimo da je $c = 3$.

Kako je $2a = 12$ to mora biti $a = 6$. (odnosno $a^2 = 36$)

Iskoristimo da je $c^2 = a^2 - b^2$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$3^2 = 6^2 - b^2$$

$$9 = 36 - b^2$$

$$b^2 = 36 - 9$$

$$b^2 = 27$$

Zamenimo u jednačinu elipse i $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ evo rešenja.

Primer 2.

Odrediti jednačinu elipse koja sadrži tačke $M(6,4)$ i $N(-8,3)$

Koordinate datih tačaka ćemo zameniti u jednačinu elipse, ali je bolje da koristimo oblik $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$M(6,4) \rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^26^2 + a^24^2 = a^2b^2$$

$$36b^2 + 16a^2 = a^2b^2$$

$$N(-8,3) \rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2(-8)^2 + a^23^2 = a^2b^2$$

$$64b^2 + 9a^2 = a^2b^2$$

Sad uporedimo leve strane ove dve jednakosti jer su im desne iste!

$$36b^2 + 16a^2 = 64b^2 + 9a^2$$

$$16a^2 - 9a^2 = 64b^2 - 36b^2$$

$$7a^2 = 28b^2$$

$$a^2 = 4b^2$$

Sada se vratimo u jednu od ove dve jednakosti i zamenimo dobijenu vrednost.

$$a^2 = 4b^2$$

$$\underline{64b^2 + 9a^2 = a^2b^2}$$

$$64b^2 + 9 \cdot 4b^2 = 4b^2b^2$$

$$100b^2 = 4b^4$$

$$4b^4 - 100b^2 = 0$$

$$4b^2(b^2 - 25) = 0$$

$$b^2 = 25 \rightarrow a^2 = 4 \cdot 25 \rightarrow a^2 = 100$$

Zamenimo ovo u jednačinu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

i evo rešenja.

Elipsa i prava

Slično kao kod kružnice, da bi odredili međusobni položaj prave i elipse, rešavamo sistem jednačina:

$$y = kx + n \quad \text{i} \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

- Ako sistem nema rešenja, onda se prava i elipsa ne seku, to jest $a^2k^2 + b^2 < n^2$
- Ako sistem ima dva rešenja, onda prava seče elipsu u dvema tačkama $a^2k^2 + b^2 > n^2$
- Ako sistem ima jedno rešenje, prava je tangenta elipse i zadovoljava USLOV DODIRA:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

Napomena

Ako nam traže tangentu elipse u datoj tački (x_0, y_0) na elipsi (koja pripada elipsi), onda imamo gotovu formulu:

$$t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Primer 3.

U presečnim tačkama prave $5x - 3y - 14 = 0$ i elipse $x^2 + 3y^2 = 28$ konstruisane su tangente na elipsu. Odrediti jednačine tangenata.

Ovde najpre moramo rešiti sistem jednačina i naći tačke preseka.

$$5x - 3y - 14 = 0 \quad \text{odavde izrazimo } x \dots$$

$$x^2 + 3y^2 = 28$$

$$x = \frac{3y + 14}{5} \rightarrow \text{ovo zamenimo u drugu jednačinu}$$

$$\left(\frac{3y + 14}{5}\right)^2 + 3y^2 = 28$$

$$\frac{9y^2 + 84y + 196}{25} + 3y^2 = 28$$

$$9y^2 + 84y + 196 + 75y^2 = 700$$

$$84y^2 + 84y - 504 = 0 \quad \text{sve podelimo sa 84}$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = -3$$

odavde je

$$y_1 = 2 \rightarrow x_1 = \frac{3 \cdot 2 + 14}{5} \rightarrow x_1 = 4$$

$$y_2 = -3 \rightarrow x_2 = \frac{3 \cdot (-3) + 14}{5} \rightarrow x_2 = 1$$

www.matematiranje.com

Dobili smo da se prava i elipsa seku u tačkama (4, 2) i (1,-3).

Pošto su to tačke **na elipsi** upotrebićemo gotovu formulu: $t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$

Najpre da elipsu prebacimo u drugi oblik:

$$x^2 + 3y^2 = 28 \quad \text{celu jednačinu podelimo sa 28}$$

$$\frac{x^2}{28} + \frac{3y^2}{28} = 1 \quad \text{Kad se desi da nema skraćivanja, prebacimo taj broj " ispod"...$$

$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{\frac{28}{3}} = 1$$

$$\text{za}(4,2) \rightarrow t_1: \frac{x \cdot 4}{28} + \frac{y \cdot 2}{\frac{28}{3}} = 1$$

Kad malo sredimo...

$$t_1: 2x + 3y - 14 = 0$$

$$\text{za}(1,-3) \rightarrow t_2: \frac{x \cdot 1}{28} + \frac{y \cdot (-3)}{\frac{28}{3}} = 1$$

Kad malo sredimo...

$$t_2: x - 9y - 28 = 0$$

Primer 4.

Odrediti parametar p tako da prava $y + x + p = 0$ predstavlja tangentu elipse $2x^2 + 3y^2 = 30$

E ovde već moramo koristiti uslov dodira. Najpre sredimo pravu i elipsu da iz njih možemo pročitati šta nam treba za uslov dodira.

$$\begin{aligned} y + x + p &= 0 & 2x^2 + 3y^2 &= 30 \quad \text{sve podelimo sa 30} \\ y &= -x - p & \frac{2x^2}{30} + \frac{3y^2}{30} &= 1 \\ \text{Odatve je } k &= -1 \text{ i } n &= -p & \\ & & \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} &= 1 \rightarrow a^2 = 15 \text{ i } b^2 = 10 \end{aligned}$$

Dalje koristimo uslov dodira:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

$$15(-1)^2 + 10 = (-p)^2$$

$$25 = p^2$$

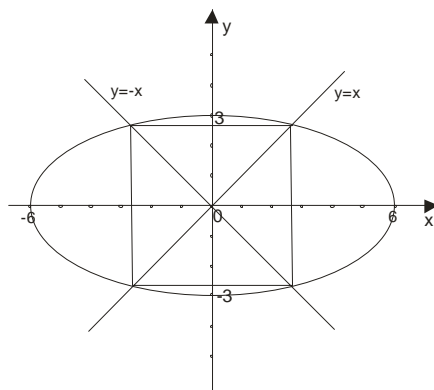
$$p_1 = 5$$

$$p_2 = -5$$

Primer 5.

U elipsu $x^2 + 4y^2 = 36$ upisan je kvadrat. Odrediti njegovu površinu.

Ovde je neophodno nacrtati sliku i postaviti problem.



Šta možemo uočiti?

Prave $y = x$ i $y = -x$ u preseku sa elipsom daju temena tog upisanog kvadrata!

Dakle rešavamo sistem $y = x$ i $x^2 + 4y^2 = 36$

$$x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\underline{y = x}$$

$$x^2 + 4x^2 = 36$$

$$5x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{5} \rightarrow x_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}, x_2 = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Kako je $y = x$ i $y = -x$

Koordinate temena su $A(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}); B(\frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}); C(-\frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}); D(-\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}})$

Obeležimo stranicu kvadrata sa a . Njenu dužinu dobijamo kao rastojanje između tačaka, recimo A i B.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$a = \sqrt{0 + \left(-\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2} \text{ kvadriramo}$$

$$a^2 = \frac{144}{5}$$

A znamo da je $P = a^2$

$$P = \frac{144}{5}$$