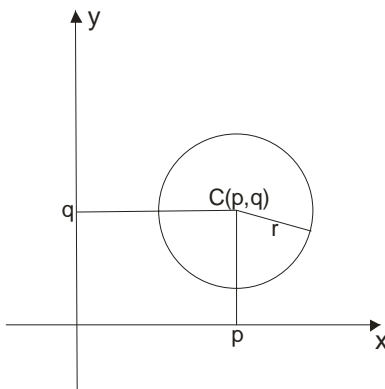


## KRUŽNICA

**Kružnica (kružna linija) je skup tačaka u ravni sa osobinom da su sve tačke tog skupa na jednakom rastojanju ( $r$ ) od jedne stalne tačke ( $C$ , centar) te ravni.**

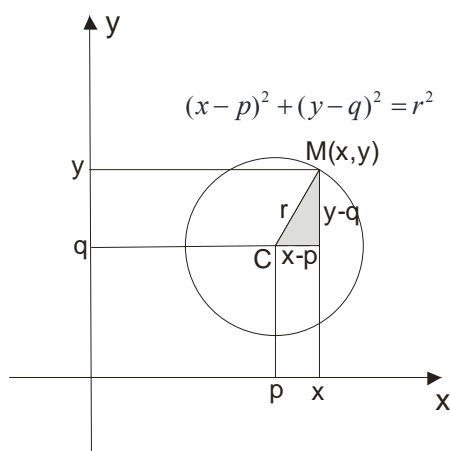
**Kružnica je dakle određena tačkom  $C$  i pozitivnim brojem  $r$  (poluprečnikom).**



**Opšta jednačina kružnice je:**  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

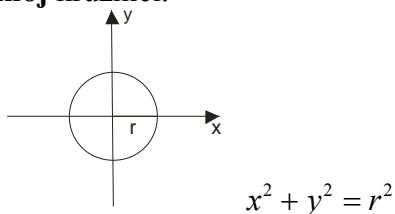
Odakle ona?

Posmatrajmo sliku:



Tačka  $M(x,y)$  je na kružnici. Uočimo pravougli trougao na slici. Primena Pitagorine teoreme nam daje traženu jednačinu kružnice.

Ako je  $p = 0$  i  $q = 0$  onda se radi o **centralnoj** kružnici.



Kako “spakovati” kružnicu ako je data u drugom obliku ?

Ima dva načina.

### **I način**

Ako je kružnica data u obliku  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  možemo koristiti formuliće

$$p = -\frac{d}{2}$$

$$q = -\frac{e}{2}$$

$$r^2 = p^2 + q^2 - f$$

#### **Primer 1.**

Odrediti koordinate centra i poluprečnik kružnice  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

Uporedimo  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$  sa  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  i imamo  $d = 6$ ,  $e = -4$  i  $f = -12$

Dalje koristimo formule

$$p = -\frac{d}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$q = -\frac{e}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$r^2 = p^2 + q^2 - f = (-3)^2 + 2^2 - (-12) = 25$$

Ovo zamenimo u jednačinu kružnice  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  i dobijamo

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

$$(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

### **II način**

Vršimo dopunu do punog kvadrata!

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$  Najpre pretumbamo, svi sa x, pa sa y, pa brojevi...

$x^2 + 6x + y^2 - 4y - 12 = 0$  Pazi, uvek dodajemo  $(\frac{\text{onaj uz x}}{2})^2$  i to isto oduzmemo, pa tako i za y.  $(\frac{\text{onaj uz y}}{2})^2$

$$x^2 + 6x + (\frac{6}{2})^2 - (\frac{6}{2})^2 + y^2 - 4y + (\frac{4}{2})^2 - (\frac{4}{2})^2 - 12 = 0$$

$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 12 = 0$  Sad sklopimo pune kvadrate a brojke prebacimo na desnu stranu...

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

Vi odaberite sami šta vam je lakše...

## Primer2.

Napisati jednačinu kružnice koja sadrži tačke  $A(5,6)$ ,  $B(-3,2)$  i  $C(-2,-1)$ .

I ovaj tip zadatka možete rešavati na dva načina.

### I način

Koristimo “ rasklopljeni” oblik kružnice  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  i umesto  $x$  i  $y$  menjamo koordinate datih tačaka, oformimo sistem tri jednačine sa tri nepoznate i rešimo ga...

$$\begin{array}{lll} A(5,6) \rightarrow x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 & B(-3,2) \rightarrow x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 & C(-2,-1) \rightarrow x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \\ 5^2 + 6^2 + d \cdot 5 + e \cdot 6 + f = 0 & (-3)^2 + 2^2 + d \cdot (-3) + e \cdot 2 + f = 0 & (-2)^2 + (-1)^2 + d \cdot (-2) + e \cdot (-1) + f = 0 \\ 5d + 6e + f = -25 - 36 & -3d + 2e + f = -9 - 4 & -2d - e + f = -4 - 1 \\ 5d + 6e + f = -61 & -3d + 2e + f = -13 & -2d - e + f = -5 \end{array}$$

Evo tri jednačina, prelazimo u sistem...

$$\begin{array}{l} 5d + 6e + f = -61 \\ -3d + 2e + f = -13 \\ -2d - e + f = -5 \end{array}$$

Sistem rešite na način koji obožavate ...( imate u I godini fajl sistemi pa se podsetite...)

Dobijamo rešenja  $d = -4, e = -4, f = -17$  i to zamenimo u  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

$$x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + y^2 - 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 17 = 0$$

$$\underline{x^2 - 4x + 4 - 4} + \underline{y^2 - 4y + 4 - 4} - 17 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

### II način

Date tačke  $A(5,6)$ ,  $B(-3,2)$  i  $C(-2,-1)$  direktno menjamo u jednačinu kružnice :  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

$$\begin{array}{lll} A(5,6) \rightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 & B(-3,2) \rightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 & C(-2,-1) \rightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \\ (5 - p)^2 + (6 - q)^2 = r^2 & (-3 - p)^2 + (2 - q)^2 = r^2 & (-2 - p)^2 + (-1 - q)^2 = r^2 \end{array}$$

Dobili smo dakle sistem:

$$(5-p)^2 + (6-q)^2 = r^2$$

$$(-3-p)^2 + (2-q)^2 = r^2$$

$$(-2-p)^2 + (-1-q)^2 = r^2$$

Kako je kod sve tri jednačine desna strana ista, uporedimo leve strane, recimo prve i druge, pa prve i treće jednačine.

$$(5-p)^2 + (6-q)^2 = (-3-p)^2 + (2-q)^2$$

$$25 - 10p + p^2 + 36 - 12q + q^2 = 9 + 6p + p^2 + 4 - 4q + q^2$$

$$25 - 10p + 36 - 12q = 9 + 6p + 4 - 4q$$

$$-16p - 8q = -48$$

$$2p + q = 6$$

$$(5-p)^2 + (6-q)^2 = (-2-p)^2 + (-1-q)^2$$

$$25 - 10p + p^2 + 36 - 12q + q^2 = 4 + 4p + p^2 + 1 + 2q + q^2$$

$$25 - 10p + 36 - 12q = 4 + 4p + 1 + 2q$$

$$-14p - 14q = -56$$

$$p + q = 4$$

Sad oformimi sistem od dve jednačine sa dve nepoznate

$$2p + q = 6$$

$$\underline{p + q = 4}$$

$$p = 2$$

$$q = 2$$

Vratimo se u jednu od prve tri jednačine da nadujemo poluprečnik r

$$(5-p)^2 + (6-q)^2 = r^2$$

$$(5-2)^2 + (6-2)^2 = r^2$$

$$9 + 16 = r^2$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5$$

I dobili smo jednačinu tražene kružnice

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

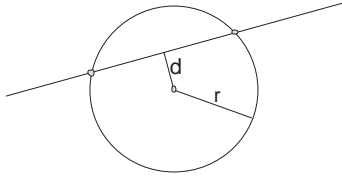
Vi odaberite koji vam je način jasniji i radite po njemu ili onako kako vaš profesor zahteva...

## Prava i kružnica

Za uzajamni položaj prave i kružnice u ravni postoje tri mogućnosti:

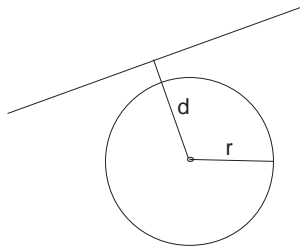
i)

Prava i kružnica imaju dve zajedničke tačke. Ovo je situacija kada je rastojanje od centra kružnice do prave manje od poluprečnika kružnice.



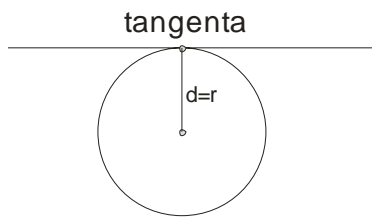
ii)

Prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka. Ovde je rastojanje od centra kružnice do prave veće od poluprečnika kružnice.



iii)

Prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku. Ovde je rastojanje od centra kružnice do prave jednako sa poluprečnikom i tada se prava zove TANGENTA .



Ispitivanje odnosa prave i kružnice svodi se na rešavanje sistema od jedne linearne i jedne kvadratne jednačine.

Posmatrajmo pravu  $y = kx + n$  i kružnicu  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

Umesto  $y$  u jednačini kružnice zamenimo  $kx + n$  i posle sredjivanja izvodimo sledeći zaključak:

- i) Ako je  $r^2(k^2 + 1) - (kp - q + n)^2 > 0$  prava i kružnica imaju dve zajedničke tačke
- ii) Ako je  $r^2(k^2 + 1) - (kp - q + n)^2 < 0$  prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka
- iii) Ako je  $r^2(k^2 + 1) - (kp - q + n)^2 = 0$  prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku

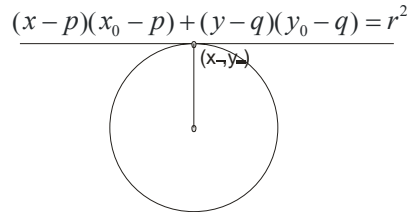
Situacija kad prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku se još naziva i

$$\text{USLOV DODIRA : } r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$$

**Napomena :**

Ako tražimo tangentu iz neke tačke VAN kružnice neophodno je koristiti uslov dodira. Ali ako trebamo naći tangentu baš u tački dodira čije koordinate znamo možemo koristiti gotovu formulu:

$$(x - p)(x_0 - p) + (y - q)(y_0 - q) = r^2$$



**Primer 3.**

Iz koordinatnog početka povučene su tangente na kružnicu  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$  . Naći njihove jednačine i ugao između njih.

Najpre sredimo kružnicu da možemo pročitati p,q i r.

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

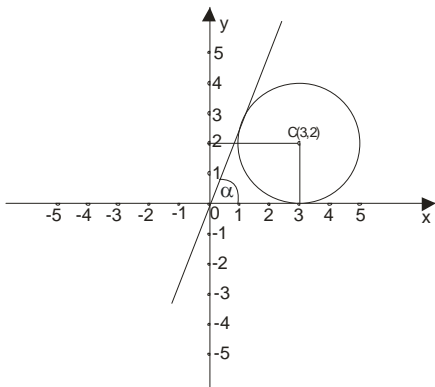
$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$$

$$\underline{x^2 - 6x + 9 - 9} + \underline{y^2 - 4y + 4 - 4} + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$p = 3, q = 2, r = 2$$

Skicirajmo sada problem kada znamo kako izgleda kružnica:



Sa skice možemo zaključiti da je jedna tangenta sama x osa, dakle prava  $y = 0$ .

Ali , ajde da do toga dodjemo i računski.

Neka je prava( prave) koju tražimo  $y = kx + n$  . Ovde menjamo koordinate tačke iz koje postavljamo tangentu, dakle  $O(0,0)$ .

$$y = kx + n$$

$$0 = k \cdot 0 + n$$

$$n = 0$$

Dobili smo da je  $n = 0$ .

$k$  tražimo iz uslova dodira.

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$$

$$4(k^2 + 1) = (3k - 2 + 0)^2$$

$$4k^2 + 4 = 9k^2 - 12k + 4$$

$$5k^2 - 12k = 0$$

$$k(5k - 12) = 0$$

$$k = 0 \vee k = \frac{12}{5}$$

Dakle tražene tangente su :

$$t_1 : y = 0$$

$$t_2 : y = \frac{12}{5}x$$

Ugao tražimo preko poznate formule za ugao između dve prave

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{0 - \frac{12}{5}}{1 + 0 \cdot \frac{12}{5}} \right|$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$$

